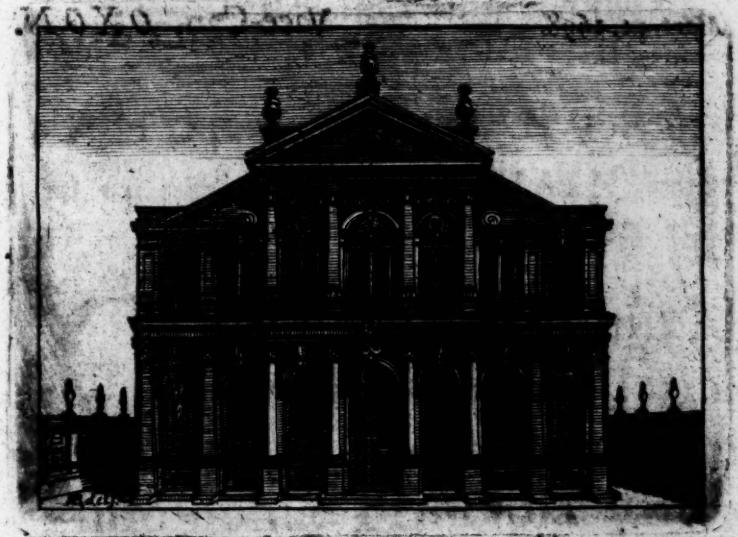
ELEMENTA
ARITHMETICÆ
NUMEROSÆ
ET
SPECIOSÆ.

In Usum Juventutis Academicæ.

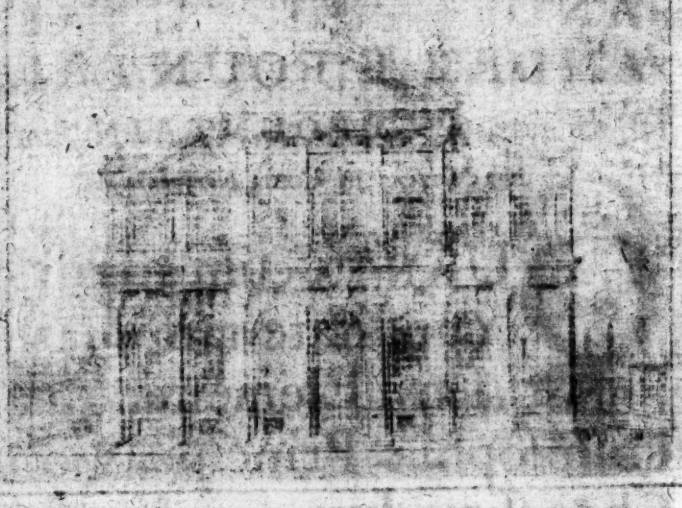


OXONIÆ,
E THEATRO SHELDONIANO,
An. Dom. MDCXCVIII.
Excudebat JOHAN. CROKE.

Imprimatur,

JOH. MEARE

Mart. 31, 1698. Vice-Can. *OXON.*



ORNATISSIMIS ADOLESCENTIBUS

EDMUNDO FEILDE

ARMIGERO

De *Stanstead-bury* in Com. *Hertfordiensi*.

THOMÆ BENNET

Fil. nat. max. S. J. BENNET Armigeri

De *Welby* in Comitatu *Leicestriensi*.

ET

ANDREÆ FOUNTAIN

Fil. nat. max. AND. FOUNTAIN Armigeri

De *Narford* in Com. *Norfolciensi*.

QUANTA cum animi jucunditate tam Matheseos Elementa quam Philosophiæ Principia Vobis, Charissimi Juvenes, haud ita pridem exposuerim, & juvat

meminisse, & nunquam non juvabit. Summa enim, quæ mortalium quisquam frui potest, Voluptas pom videtur in excolendo suo ipsius animo; proxima, in erudiendis aliis, saltem, quos benignior Natura finxit Doctrinæ admodum capaces, hoc est Vestrûm (Ornatissimi Juvenes) quam simillimos. Est scilicet unicuique Vestrûm felix Indoles, unde magna encomio materia, nisi videretur id maxime Vestram in laudem cedere, quod, per totum tempus studiis Academicis apud Nos datum, pulcris Naturæ dotibus adjunxeritis nimis raram in Juventute Industriam. Illis debetur,

quod

quod quæ plurimos à Matheſi addiſcenda deterrere ſolent, Vos minime reformidaſſis; Hunc, quod ingenius etiam Veſtris ſi quid occurreret arduum, noluiſſis idcirco maulum relinquere, ſed & tandem exuperaſſis. Unde ſpes non levis eſt, Vos aliquando ex iis fore, qui non tantum Opibus ſuis patrocinantur Matheſi, ſed & eandem Inventis augent locupletantque. Magna fortaſſe nonnullis videantur hæc, & ſunt magna: Et tamen eſt, cur de Vobis, Egregii Juvenes, vel majora ſperare fas ſit; qualia nimirum ſpectant ad Virtutis emolumentum, Patriæ gloriam, Eccleſiæ denique tutelam.

Equidem potui Virtutibus Vestris recensendis perluben-ter immorari, cum Vos & Ipse valde amem, & vicissim Mei valde amantes sciam. Sed Opus hoc utcunq; gratum præterire visum est, ne Me tanquam Adulatorem damnarent ii, qui consuetudine Vestra non sunt usi, qui contra usi sunt, tanquam Meritis Vestris iniquum. Satius igitur duxi, apud Meipsum laudare Fortunam meam, qui tales aliquando habuerim Discipulos, tales nunc habeam Amicos.

CHARISSIMI JUVENES,

Vestrum Amantissimus

E. WELLS.

PRÆFATIO.

EXTANT de utrâque Arithmeticâ, cùm Numerosâ tum Speciosâ, Opera pœnè innumera; sed quorum perplura adeo elaborata sunt, ut ipsam potius Mathesin augeant, quàm numerum Matheseos Studiosorum. Alia tantâ mole turgent, tantique ideo habentur pretii, ut, ubi par iis evolvendis est Industria, ibi iisdem emendis impar sæpe sit Loculus. Alia, arctioribus licet inclusa membranis, tamen obscurâ nimis brevitate fiunt omnium longissima; dum plus hæc, quàm amplissima Volumina luce non carentia, temporis exigunt, si non ut legantur, saltem ut intelligantur. Sunt denique nonnulli de Arithmeticâ saltem Numerosâ Tractatus, qui nimiâ quidem nec mole nec obscuritate peccant; sed cùm in ipsis quæ occurrunt Exempla non aliunde petantur, quàm à Butyro & Caseo, Zingibere & Pipere, aliisque consimilibus; cumque Tyro Arithmeticus pari ratione inibi doceatur Numeros conjungere, ac Pueruli Syllabas in Abecedariis: utut digni sint istiusmodi Tractatus, quos versando terat hebetioris ingenii Puer, Artibus Mechanicis aut rusticis laboribus mox exercendus; indigni prorsus videntur, quos ediscat juvenis Academicus, & qui ingenuis Artibus nomen dedit.

Hinc

Hinc inter tot & tantos Arithmeticæ libros videbatur hactenus desiderari aptus aliquis Juventuti Academicæ illâ in Arte erudiendæ libellus: annon (etiam post hunc nostrum jam in lucem editum) adhuc desiderandus sit, ad alios judicandum relinquo. Interim quâ ratione propositum finem assequi conatus sum, paucis dabo.

Ubicunque Juvenes maximè hærere soleant, ibi in Viâ sternendâ maximè elaborandum esse censui. Quocirca summam collocavi Operam in dilucidandâ Doctrinâ Fractionum Vulgarium, Signorum Algebraicorum, & Potestatum. *Fractionum Vulgarium Doctrinam tali methodo tradidi, ut earum praxis praxi Integrorum valdè conformis evaderet, cùm juxta communem methodum admodùm diversa, adeoque permolesta, Tyronibus videri soleat. Eadem Doctrinam Signorum Algebraicorum, seu (quod eadem redit) Operationes primarias Algebraicas ita exposui, ut apertè constaret præsertim Speciosam ad Numerosam multò propius accedere, quàm vulgò creditur. Doctrinam Potestatum magis expedire non potuisse arbitratus sum, quàm docendo Tyronem, quomodo pro Regulis Vulgaribus (nonnisi magnâ verborum copiâ exprimendis, atque adeo mentem Lectoris obruentibus potiùs quàm instruentibus) adhiberi queant Potestates Speciosæ tanquam Theoremata (concinna admodum & tamen perspicua) de Potestatum Numerosarum homogenearum seu Genesi sive Analysi. Per singulas Arithmeticæ Partes, Regulæ cujusvis Fundamentum saltem digito monstravi, ut unà cum ipsâ Praxi in-*

innoteſceret etiam Praxeos Ratio. *Et quia nonnulla ſunt ad Arithmeticam ſpectantia, quæ quidem cognitu non ſunt prorſus neceſſaria, ſunt autem utilia; idcirco iſtiuſmodi omnia nec planè omittuntur, nec interim ipſis Præceptis Arithmeticis interſeruntur, ſed adjiciuntur more* Annotationum: *Eo nimirum conſilio, ut ſi cui Arithmeticæ ſtudioſo minus vacet, is ad metam rectiſſimâ pergat viâ; cui verò plus ſuppetat otii, à recto aliquando tramite deflectat ille curſum ſuum, nec ſine commodo.*

Porrò cùm jejuna, adeoque minùs grata, Tyronibus videri ſoleat nuda Numerorum Praxis, ad calcem Libri apponuntur Problemata *quamplurima variis de Scientiis petita, quorum Solutiones non modò inſerviunt exercendis Regulis Arithmeticis, verùm etiam edocent Regulas quaſdam Chronologicas, Planimetricas, Stereometricas, &c. Juveni Academico apprimè cognoſcendas, aut ſaltem ducunt ad Theoremata quædam jucunda, & non inutilia.*

Lectu dum interim eſt, quòd nonnulla (currente prælo) ſeriùs aut inventa, aut in mentem revocata, locis minùs propriis paſſim interſerere maluerim, quàm omnino præterire.

Denique monendus eſt Lector, me ſatius duxiſſe, è Clavi Mathematicâ (*cui lucem afferre difficilioribus aliquot in locis conatus ſum*) *uti & è Scriptis* Walliſianis, *Aliiſque, nonnulla exſcribere, quàm eadem verbis quidem aliis ſed minùs propriis reddere, ut tandem evaderent Mea.*

IN-

INDEX CAPITUM.

CAP. I. *De Numerorum Gradibus sive Classibus, Partibus Constitutivis, & Divisione in Integros & Fractos.* Pag. 1.

Cap. II. *De Characteribus Numerorum tam Literalibus quam Figuralibus.* p. 7.

Cap. III. *De quatuor Primariis Operationibus Arithmeticis generatim.* p. 31.

Cap. IV. *De Additione, Numerosa & Speciosa.* p. 41.

Cap. V. *De Subductione seu Subtractione, Numerosa & Speciosa.* p. 53.

Cap. VI. *De Multiplicatione, Num. & Speciosa.* p. 59.

Cap. VII. *De Divisione, Numerosa & Speciosa.* p. 69.

Cap. VIII. *De Secundariis Operationibus Arithmeticis generatim.* p. 77.

Cap. IX. *De Involutione & Evolutione, seu de Genesi & Analysi Potestatum.* p. 79.

Cap. X. *De Reductione.* p. 103.

Cap. XI. *De Proportione.* p. 127.

Cap. XII. *De Æquatione, & de Quæstionibus per Æquationem solvendis; sive de Regula Algebræ.* p. 153.

Appendix Prior *De Usu Logarithmorum.* p. 171.

App. Posterior: *viz. Problemata sive Quæstiones ad exercendas Regulas* Arithmeticæ. p. 187.

ERRATA.

Pag. 8. lin. antepenult. *lege* 2^{α}, β'. p. 22. l. 12. *lege* Eruditissimo. l. 33. *lege* $\overline{B+C}$. p. 93. l. 6. ante ult. *lege* R, Z. p. 168. l. 19. *lege* §. VI. p. 176. l. 17. *lege* quæritur. p. 188. l. 13. *lege* Varronianum. p. 193. l. 7. *lege* 48000. p. 205. l. 11. *lege* uno Milliari, 2^{dus} duobus. p. 214. l. 10. *lege* invicem succedentia.

ELE-

ELEMENTA ARITHMETICÆ, NUMEROSÆ ET SPECIOSÆ.

CAP. I.

De Numerorum Gradibus ſive Claſſibus, Partibus Conſtitutivis, & Diviſione in Integros & Fractos.

I. CUM pro nova cujuſlibet Unitatis additione, novus in infinitum exoriatur Numerus: nè infinitus etiam evaderet labor ſingulis Numeris nova vocabula excudendi ediſcendique, feliciter excogitata eſt methodus diſtribuendi Numeros in *Gradus* ſive *Claſſes*, ea interim ratione, ut ſingulis non tam Claſſibus, quam Claſſium ſenionibus nova aſſignaretur denominatio, cum qua voces prius adhibitæ denuo repeterentur; unde quilibet Claſſium ſenio appellatur *Periodus*. Quælibet autem Periodus diſtinguitur in duas ſemiperiodos aut Periodos minores, quarum prior ſemper

eſt Unitatum; poſterior, ſemper Chiliadum; utraque poſt ſingulos Claſſium terniones repetit vocabula [Un. Dec. Cen.], juxta Schema appoſitum:

	Numeratores	*Denominatores*		
Claſſis (Continet unam, duas, tres, quatuor, quinque, ſex, ſeptem, octo, novem)	1ª	Unitates	Unitatum	Unitatum
	2ª	Decadas		
	3ª	Centurias		
	4ª	Unitates	Chiliadum	
	5ª	Decadas		
	6ª	Centurias		
	7ª	Unitates	Unitatum	Millionum
	8ª	Decadas		
	9ª	Centurias		
	10ª	Unitates	Chiliadum	
	11ª	Decadas		
	12ª	Centurias		
	13ª	Unitates	Unitatum	Billionum
	14ª	Decadas		
	15ª	Centurias		
	16ª	Unitates	Chiliadum	
	17ª	Decadas		
	18ª	Centurias		
	19ª	Unitates	Unitatum	Trillionum
	20ª	Decadas		
	21ª	Centurias		
	22ª	Unitates	Chiliadum	
	23ª	Decadas		
	24ª	Centurias		
	&c.		&c.	

II. Ex quo Schemate patet, quod ope methodi inibi uſurpatæ, voces tantum ſedecim, varia quidem, ſed certa, ratione diſpoſitæ, numeros plures, quam qui-

quibus inter numerandum unquam opus eſt, ſatis diſtinguere valeant.

III. Quinetiam ex eodem Schemate conſtat, 1mo. Numerum omnem ex duabus partibus componi; quarum una *Denominans* dici poteſt, altera *Numerans*: Illa enim docet, *quid* numeretur; hæc, *quoties*. E. g. Myrias, ſi reſolvatur in ſuas partes, eſt una (pars numerans) decas Chiliadum (pars denominans). Pari modo numerus etiam ſimpliciſſimus reſolvi poteſt in (numeratorem) unam (& denominatorem) Unitatem.

2do. Numeratores eſſe in univerſum novem, viz. unum, duo, tria &c. ad novem: Denominatores autem, quotvis; excuſis nimirum novis denominationibus, quibus deſignari poſſunt Periodi, quotquot producta Claſſium ſerie exurgent; cujuſmodi ſunt Quadrillio, Quintillio, Sextillio, Septillio, Octillio, Nonillio &c.

3^tio. Numeratorem quemlibet Claſſibus univerſis eſſe communem; quemlibet vero Denominatorem, unius tantum Claſſis proprium: Adeoque in ſingulis Claſſibus contineri numeros novem, totidem ſcilicet, quot ſunt Numeratores ſingulis Denominatoribus applicandi.

4to. Denominatorum (ſeu, quod eodem recidit, Claſſium numeralium) ſeriem ratione decupla perpetuo augeri; ut, Unitates, Decades, Centuriæ Unitatum; Unitates, Decades, Centuriæ Chiliadum &c. Ac proinde Periodum quamlibet à ſubſequenti exuperari ratione milliocupla; Semi-periodum, millecupla.

IV. His in Schemate perſpectis, videtur heic loci commode adnotandum, quod ſi Denominator deſignet res Integras, numerus *Integer* dici ſoleat: ſin fragmina ſeu partes cujuſvis rei, numerus *Fractus*. Putà, una decas Solidorum integrorum, hoc eſt, abſolute

ſumptorum, pro numero Integro habetur; contra, una decas Solidorum, tanquam partium, in quas Mina frangi intelligitur, (v. c. una decas partium viceſimarum, hoc eſt, decem partes viceſimæ, ſeu ſemiſſis, Minæ) pro numero Fracto.

V. Et hæc obſervatio haud parum conducet ad facilitandam Fractionum doctrinam, quæ idcirco Tyronibus adeo difficilis habetur, quod non ſatis intelligant tam Integris quam Fractis ſuos eſſe cum Numeratores tum etiam Denominatores; adeoque exiſtiment multo majorem eſſe diſcrepantiam inter Integros & Fractos, quam revera ſit.

VI. Maxima quidem diſcrepantia (& à qua reliquæ omnes pendent) in eo poſita eſt, quod non in Fractis, velut in Integris, unica ſit, & certa, Denominatorum ratio, ſed prorſus innumera. Nam quotcunque rationibus res dividi poteſt in partes, tot ſunt rationes Denominatorum in Fractionibus. Sic partes tertiæ, quartæ, ſextæ, nonæ, decimæ, viceſimæ, ſexageſimæ, centeſimæ &c. ſunt totidem Denominatores Fractionum, nempe *Vulgarium*.

VII. Sunt enim Fractiones aliæ, in calculis Aſtronomicis diu receptæ, quarum Denominatores ratione unimoda, ſed ſexagecupla, progrediuntur, unde vocantur Fractiones *Sexageſimales*: Hujuſmodi ſunt horarum ſcrupula prima, ſecunda, &c.

VIII. Demum & alia Fractionum ſpecies paucis abhinc annis excogitata eſt, aut ſaltem recepta, non ſine magno Arithmetices incremento. Earum ſcilicet Denominatores ratione unimoda, eaque decupla ad inſtar numerorum Integrorum, procedunt; ut partes decimæ, centeſimæ, milleſimæ &c. unde iſtiuſmodi Fractiones ſortiuntur nomen Fractionum *Decimalium*.

NOTÆ.

NOTÆ.

Ad §. I. Perlecto hoc Capite, conſulat Lector Clmum *Locke* cap. 16. lib. 2. de Intellectu Humano. Ibi reperiet alia nonnulla ad Numerorum naturam ſpectantia, & ſcitu admodum utilia, quæ idcirco heic omittuntur. Speciatim intelliget, quanto præſtet Periodos poſt 2dam omnes deſignare per voces ſimplices, viz. Billiones, Trilliones &c. quam per vocem aliquam ſæpius repetitam, nempe Milliones millionum, milliones millionum millionum &c. ut vulgo fieri ſolet.

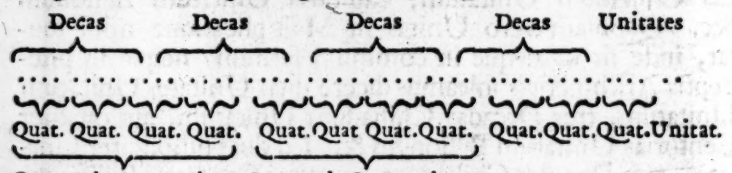
Ad §. III. Juxta ſeriem Claſſium in Schemate noſtro expanſam, Denominator quilibet nonniſi tribus vocabulis exprimendus eſt; putà, Unitas Unitatum Unitatum, Decas Chiliadum Unitatum, Centuria Unitatum Billionum &c. Quoniam vero Unitas in Multiplicatione nihil mutat, inde fit ut neque in communi ſermone neque in præceptis Arithmeticis ſoleamus dicere duas Unitates Unitatum Unitatum, tres Decadas Chiliadum Unitatum, aut quatuor Centurias Unitatum Billionum &c. ſed duas ſimpliciter Unitates, tres Decadas Chiliadum, quatuor Centurias Billionum &c. (Pari ratione, licet Unitas revera ſit generalis & unica omnium Periodorum denominatio; dicimus tamen ſimpliciter milliones, non milliones Unitatum &c.) Quoties igitur occurrent voces [Un. Dec. Cen. Chil. &c.], non adjecta cujuſvis Periodi Denominatione; intelligendæ ſunt Un. Dec. Cen. Chil. &c. Unitatum, hoc eſt, intelligenda eſt in iſto caſu Denominatio Periodi primæ.

Ibid. 2. & 3. Sumatur Claſſis quælibet v. c. quinta. Vides ex §. I. hujuſce denominationem eſſe Decadas Chiliadum Unitatum, quæ ita ejuſdem propria eſt, ut nulli alteri in univerſa Claſſium ſerie attribuatur. Sed huic uni Denominationi applicari poſſunt Numeratores omnes; nempe dicimus unam, duas, tres &c. ad novem Decadas Chiliadum. Quare in Claſſe 5ta ſigillatim ſumpta ſunt numeri novem. Nec habentur plures; nam ſi novem Decadibus Chiliadum unam inſuper addideris, ſtatim exurget una Centuria Chiliadum, quæ ſpectat ad Claſſem ſextam. Et ſi rurſus novem Centuriis Chiliadum una inſuper addatur, exoritur Millio, ad Claſſem ſeptimam ſpectans. Atque ita porro de Claſſibus ſequentibus. Unde liquido conſtat, Integrorum Numeratores eſſe tantum novem. Dicimus quidem in communi ſermone (brevitatis, ut videtur, gratia) undecim

aut

aut ſedecim &c. v. g. Centurias; ſed Arithmetica formulam illam, utpote minus propriam, reſpuit, & ubique poſtulat, ut reſolvantur undecim Centuriæ in unam Chiliadem, & Centuriam unam; ſedecim Centuriæ in Chiliadem unam & ſex Centurias.

Ibid. 4. Quamvis in eadem Claſſium numeralium ratione decupla omnes omnino gentes mire conſpirent: poteſt tamen alia quælibet ratio adhiberi, putà, quadrupla, quintupla &c. Nam ex ſubjecta punctorum ſerie conſtat, duos Quaterniones Quaternionum cum tribus Quaternionibus ſimplicibus & binis inſuper Unitatibus æque valere, ac Decadas quatuor cum ſex Unitatibus; nempe utrovis modo deſignari Puncta quadraginta ſex; v. g.



Ad §. VI, VII, VIII. In Fractionibus Vulgaribus, necnon Sexageſimalibus, videntur eſſe Numeratores plures quam novem, h. e. plures quam in Integris. Dicimus enim, nec improprie, decem, undecim, quindecim v. c. partes decimas-ſextas; item quadraginta aut quinquaginta ſcrupula prima, ſecunda &c. Cum vero iſtiuſmodi Numeratores in Fractionibus jam dictis componantur ex Numeratoribus & Denominatoribus Integrorum, atque ideo in eoſdem reſolvi poſſint; hinc licet pronunciare, quod in numeris univerſis non ſint revera plures quam novem Numeratores. In Fract. Decimalibus (de quibus ſolis reſtat dicendum) plures non eſſe æque conſtat, ac in Integris. Si enim novem partibus v. g. milleſimis una adjiciatur, fiet una pars centeſima: & ſi rurſus novem partibus centeſimis unam adjungas, conſtitues unam partem decimam &c. ut oſtendet infra Cap. 3. Decimalium praxis.

NB. Non omnis Fractio, cujus Denominator eſt Decimalis vel Sexageſimalis, propterea pro Fractione Decimali aut Sexageſimali habenda eſt; niſi partium earum, de quibus agitur, univerſa ſeries ratione illa Decimali aut Sexageſimali procedere intelligatur.

CAP.

CAP. II.

De Characteribus Numerorum tam Literalibus quam Figuralibus.

I. HActenus de Numerorum procreatione, diſpoſitione, aliiſque ad Arithmeticam Theoreticam quodammodo ſpectantibus: ad Practicam nunc progredimur, quæ docet vel Numeros propriis Characteribus depingere, & vocatur ideo *Characteriſtica*; vel jam depictos variis modis tractare, prout exigit Computi ratio, unde dici ſolet *Logiſtica*.

II. Quod ad Arithmeticam Characteriſticam attinet, de qua impræſentiarum agitur, veriſimillimum eſt, apud omnes omnino gentes *Literas* ſuæ linguæ proprias pro notis Arithmeticis antiquitus uſurpatas eſſe. Conſtat de literis Hebraicis necnon de Græcis, quarum uſum numeralem pro inſtituti noſtri ratione paucis expediemus. *Vide Tabb. Charact. ad fin. Cap.*

III. Eadem igitur methodo, qua ipſi Numeri, etiam Literæ Numerales tam Hebraicæ quam Græcæ diſtribuuntur in Claſſes; quarum tres ſunt pro numero Claſſium quæ conficiunt Periodum minorem. Quemadmodum enim poſt primam Periodum minorem denuo repetuntur vocabula numeralia [Un. Dec. Cen.], adjecta inſuper denominatione millenaria: ita poſt eandem regreſſus fit ad literas Monadicas, Denarias, Centenariaſque, ſuperaddito valore millenario.

	Chil.	Un.		Chiliadum			Unitatum		
E. g.	σ λ δ	ρ ι α	h. e.	Cen.	Dec.	Un.	Cen.	Dec.	Un.
	CDM	CDM		duæ	tres	quatuor	una	una	una.

IV. Rur-

IV. Rurſus, quemadmodum in ſingulis Claſſibus Arithmeticis ſunt (juxta §. III. 3. Cap. I.) Numeri novem: ita in ſingulis Claſſibus Alphabeticis ſunt novem literæ, ſeu notulæ numerales. Et quia hoc pacto requiruntur in utroque Alphabeto Characteres viginti ſeptem; ſunt autem Hebræis Literæ ſupra viginti tantum duæ, Græcis tantum quatuor: neceſſe erat utrumque Alphabetum notulis aliquot adaugere, quo melius uſui numerali inſerviret, hoc eſt, Periodus literalis cum Periodo numerica ſemper coincideret.

Hoc conſilio adjunxerunt Hebræi Alphabeto ſuo numerali quinque (quas vocant) literas finales, quibus deſignantur poſtremæ quinque Centuriæ. Noluerunt autem Græci tres illas quas excogitarunt notulas ſimul omnes ad calcem Alphabeti ſui adjicere, ſed tribus literarum Claſſibus ſeorſim (h. e. ſingulis unam) inſeruerunt; hac ſcilicet mente, ut Alphabetum numerale Græcum cum Hebraico magis congrueret.

V. Denique, ut ipſi Numeri aut continentur in Claſſibus Numeralibus, aut conflantur ex numeris variarum Claſſium numeralium varie conjunctis: ſic & numerorum Characteres literales aut continentur in Claſſibus Alphabeticis, aut conficiuntur ex literis variarum Claſſium Alphabeticarum varie coordinatis. E. g. Numerus *vicenarius*, quemadmodum eſt numerus ſecundus Claſſis ſecundæ, viz. duæ Decades; ſic & exprimitur per literam ſecundam Claſſis ſecundæ in utroque Alphabeto, Hebræo & Græco, viz. ב, κ. Numerus autem *duodenarius*, veluti componitur ex numero primo Claſſis ſecundæ, & ſecundo primæ, putà ex Decade una & binis Unitatibus: ſic etiam deſcribitur litera prima Claſſis ſecundæ, & ſecunda primæ, viz. אי, ια.

Ubi notandum eſt, quod ex iſtiuſmodi numeris compoſitis *quindenarius* peculiari modo ſcribatur

apud

apud Hebræos. Sicut enim numerus iſte conflatur ex numero primo Claſſis ſecundæ, & quinto primæ, hoc eſt, Decade una & quinque Unitatibus; ita & depingi debet per literam primam Claſſis ſecundæ, & quintam primæ, hoc eſt, יה. Quoniam vero literæ illæ conſtituunt unum è Dei nominibus, nolunt idcirco Hebræi nimis religioſi eaſdem uſu Arithmetico profanari, ſed earum loco uſurpant literas nonam & ſextam Claſſis primæ, nempe טו.

VI. At vero ſunt qui autumant Hebræis Græciſque aliam fuiſſe, & antiquiorem, Arithmeticæ literalis formam, qua ſcilicet unaquæque litera exceſſu excrevit Monadico, adeoque numerum indigitavit pro ordine, quem ipſa in Alphabeto ſortita eſt. Extare volunt exempla in Hebr. Bibliis, maxime Pſalm. 119. & in notatione librorum Homericorum.

VII. Quicquid autem ſit de forma hac Monadica, certum eſt Græcis olim in uſu fuiſſe numerandi rationem ab Alphabetica plane diverſam, nempe per ſex tantum literas Capitales, totidem vocum numeralium indicia, ut Ι Ἷος, Π Πέντε, Δ Δέκα, Η Ηκατὸν, Χ Χίλια, Μ Μύρια. Ad numeros exprimendos literæ iſtæ non ſolum variis modis conjunguntur; ſed & nonnunquam repetuntur; ut ΙΙ duo, ΔΔΔ triginta &c. vel per Π multiplicantur, inſcriptæ hunc ad modum, viz. ⍙ quinquaginta, ⍐ quingenta &c. Notandum vero, quod Π nunquam multiplicet incluſam Ι, (nam ſic nihilo amplius valeret quam ſimplex Π;) nec geminetur unquam, aut litera quævis alia ultra quartam vicem: quippe quod ſimplicior ſit modus deſignandi iſtiuſmodi numeros; V. g. Δ tantum valet ac ΠΠ, & ⍙ tantum ac ΔΔΔΔΔ &c.

VIII. Ex hac ultima numerandi forma Romani proculdubio ſuam deduxerunt; idque vel ex eo ſatis liquet, quod numeros non paucos Romani eodem

plane modo depingunt, quo Græci ſolebant per literas iſtas Majuſculas. Exempla ſunto XHHHΔΠIII *Marmor. Arundell.* & MCCCXVIII.

IX. Quamvis autem utriuſque formæ par fere ratio, non ita tamen Characterum. Etenim ex Romanis Characteribus duo tantum ſunt, qui (Græcorum ad inſtar) habentur numerorum quos indicant literæ initiales. Unde aſſerere non dubitant nonnulli, Arithmeticos Romanorum Characteres revera Figuras eſſe, non Literas, utcunque in Literarum conſimilium formas (Scribarum ſive incuria ſive conſilio) ſenſim abiere.

X. Uſitatiores Romanorum notas numerales Tabella adjuncta exhibet, quarum de origine liberum cuique eſto judicium.

Tabella Characterum Numeralium Romanorum.

I unum		
V quinque	IↃ	quinque millia
X decem	CCIↃ	decem millia
L quinquaginta	IↃↃ	quinquaginta mill.
C centum	CCCIↃↃ	centum millia
D vel IↃ quingenta	IↃↃↃ	quingenta millia
M vel CIↃ mille	CCCCIↃↃↃↃ	mille millia.

XI. Per hos Characteres aut varie conjunctos, aut aliquoties repetitos, Romani numeros omnes exprimere ſolebant. Ubi notandum, 1°. quod V & L nunquam geminentur, nec Characteres alii ſæpius quam quater, ob cauſam ſupra memoratam §. VII. 2do. Si I præponatur aliquoties ſymbolis V vel X, itidem X ſymbolis L vel C; utrumque ſe totiès iiſdem detrahit; ut IV quatuor, IIX octo, XL quadraginta, XXC octoginta &c. Quinetiam 3^tio^. ſolebant Romani nonnunquam brevitatis gratia numeros millenarios depingere hunc ad modum, Ī mille, V̄ quinque millia, X̄ decem millia, L̄ quinquaginta millia, C̄ centum millia.

XII. Et

XII. Et ſatis hæc de Literis numeralibus, ſaltem Hebræis, Græcis, & Romanis, quæ inſtituto noſtro ſufficiunt: In quibus demum omnibus valet una hæc Lex, quod nota major minori ſit præponenda, h. e. ad *dextram* apponenda, ſi ſit Hebraica; ſin Græca aut Romana, ad *ſiniſtram*. Scribunt enim Hebræi à dextra ſiniſtrorſum, Græci Romanique ordine contrario. Et heic non eſt omittendum, literas numerales diſtinctionis gratia plerumque notari, Hebræas virgulis, Græcas & Romanas lineolis tranſverſim ſupra-poſitis, ut אצ״ו״ם, $\overline{\alpha\chi\zeta\zeta}$, $\overline{\text{MDCXCVII}}$. E quibus exemplis, primum docet Literas finales Hebræas (licet centenariæ ſint) ratione ordinis ſui ad finem numerorum rejiciendas eſſe, contra legem generalem. Oſtendit ſecundum, literas valore millenario præditas à Græcis diſtingui per virgulam ſubſcriptam.

XIII. At vero tandem alius inſuper eſt Literarum quarumlibet uſus numeralis, nempe quo Litera quævis pro numero quovis ponitur in Arithmetica *Specioſa* ſeu *Algebraica*.

XIV. ACcedimus jam ad *Figuras* Arithmeticas, quo nomine intelligi ſolent numerorum ſigna quævis alia præter Literas. Habentur autem Figuræ duplices; *Indicæ*, quibus Orientales fere omnes, ſed Indi omnium primi ad numeros depingendos uſi ſunt; & *Vulgares*, ab Indicis efformatæ, & in Europa vulgo uſitatæ. Cum vero in numeris notandis eadem omnino ſit Figurarum utriuſque generis ratio, non eſt cur ſeorſim tractarentur, ſed Figurarum vulgarium uſum exponendo unà innoteſcet Indicarum uſus.

XV. Figuræ igitur numerales vulgo hodie uſitatæ ſunt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; nempe totidem, quot ſunt Numeratores (§. III. 2. Cap. I.), quos ordine

ſuo deſignant; ut 1 unum, 2 duo, &c. ad 9 novem. Quare Figura quælibet per ſe (h. e. per ſolam ipſius formam) ubique deſignat unum eundemque Numeratorem: Quinam autem Denominator Numeratori iſti applicandus ſit, *Locus* (non Forma) Figuræ indicat. Etenim Locorum ſeries ſeriei Denominatorum (ſeu Claſſium Numeralium) reſpondet; ita ut Locus primus (h. e. *dexterrimus*) ſit Claſſi primæ proprius, adeoque pro Denominatore ſemper habet Unitatem; Locus pariter ſecundus Claſſi ſecundæ proprius, habetque pro Denominatore ſemper Decadas Unitatum &c. V. g. in numero 666 Figura eadem ter poſita toties denotat eundem Numeratorem, nempe ſex; ſed ſex Unitates in Loco primo, ſex Decadas in Loco ſecundo, in tertio ſex Centurias.

XVI. Unde obiter liquet, maximum diſcrimen inter Figuras & Literas Numerales in eo poſitum eſſe, quod Litera quælibet unicum ſibique proprium ubivis deſignet cum Numeratorem tum Denominatorem; dum Figura quælibet proprium quidem ſibi vendicat Numeratorem, haud itidem Denominatorem. Sic Hebr. ℵ, Græc. α, & Rom. I indicant unam ſemper Unitatem; Hebr. י, Græc. ι, & Rom. X unam ſemper Decadem; Hebr. ק, Græc. ρ, & Rom. C unam ſemper Centuriam: ſed Figura 1 omnes pervagatur Claſſes, denotatque unam nunc Unitatem, nunc Decadem, nunc Centuriam &c; prout ſedes ſua indicat.

XVII. Quoniam vero Denominatores non aliunde quam ex Figurarum Locis cognoſcuntur, hinc, quoties occurrit numerus Figuris deſcribendus, qui eſt Claſſium unius aut plurium, nec tamen ab Unitate omnium; neceſſe eſt ut habeatur nihilominus ratio Locorum, ad quos pertinent Claſſes omiſſæ. Quem ad finem hodie introducitur circellus [o], tantum

tum Index Loci Numero *Vacui*; unde *Cifra* vulgo dicitur à vocabulo Arabico, quod *Vacuum* significat. E. g. Proponatur una Chilias cum ſex Centuriis, Figuris exprimenda. Numerus iſte conflatur ex numeris Claſſium tertiæ & quartæ, habenda tamen eſt ratio Claſſium duarum antecedentium, viz. primæ & ſecundæ; indicatis nimirum per totidem Cifras Locis, ad quos ſpectant Claſſes illæ, hunc ad modum 1600. Nam qua ratione quis intelliget, Figuras 1 & 6 eſſe, hanc tertiæ, illam quartæ Claſſis, niſi prius intellexerit ex Cifris binis præmiſſis, vacuos eſſe in numero propoſito duarum priorum Claſſium Locos?

XVIII. Cum autem Locus dexterrimus ſit omnium primus, ac proinde reliquorum Locorum ſeries à dextra ad ſiniſtram procedat: patet Figuræ alicujus Locum (ideoque & Denominatorem ſeu Valorem) immutari à Figuris, vel etiam Cifris, ad dextram præpoſitis; non autem ad lævam poſtpoſitis. Putà, in 6 & 61 & 601 Locus Figuræ 6 ter immutatur, adeo ut figura iſta denotet in numero primo 6 Unitates, in ſecundo 6 Decadas, in tertio 6 Centurias: ſed contra, in 6 & 16 & 106 idem eſt Locus, & proinde Valor figuræ 6, nempe 6 Unitates. Itidem 5000 denotant quinque Chiliades, ſed 0005 tantummodo quinque Unitates.

XIX. Ex iis quæ §. XV & XVII tradita ſunt (ſaltem perſpecto etiam Claſſium numeralium Schemate §. I. Cap. I.) facile colligitur ratio deſcribendi Figuris numerum quemvis Integrum, atque etiam jam deſcriptum enunciandi. E. g. Proponatur numerus Figuris exprimendus, viz. duo milliones, triginta quinque millia, centum & duo. Primo, oſtendit Schema, quas ad Claſſes ſpectent membra numeri propoſiti; viz. duo Milliones ad ſeptimam; triginta

Millia,

Millia, ſeu tres Decades Chiliadum ad quintam; quinque Millia, ſeu quinque Unitates Chiliadum ad quartam; Centum, ſeu una Centuria Unitatum ad tertiam; denique Duo, ſeu duæ Unitates, ad primam. Secundo, quænam Figuræ adhibendæ ſint ad deſignandos numeri dati Numeratores, docetur in §. XV. Et per eandem §. XV. (cognitis jam Claſſibus, unà) innoteſcit uniuſcujuſque Figuræ Locus. Nam Loci Claſſibus reſpondent; adeoque Figura indicans binos Milliones, qui ſunt Claſſis ſeptimæ, collocanda eſt in Loco pariter ſeptimo; & ſic Figuræ reliquæ collocandæ ſunt reſpective in Locis quinto, quarto, tertio, & primo. Denique per §. XVII. Loci Claſſium antecedentium, ſi quæ in numero dato omittuntur, Cifris indicandi ſunt. Quocirca in numero jam aſſignato ſtatuendæ ſunt Cifræ in Locis ſecundo & ſexto. Unde ita demum ſe habebunt Figuræ, viz. 2035102.

At vice verſa, cum ex formis Figurarum cognoſcantur Numeratores quos deſignant; & ex earundem Locis noſcantur Claſſes ordine reſpondentes: Cumque, Claſſibus jam cognitis, ex Schemate intelligi queat uniuſcujuſque Figuræ Denominator: hinc facile erit propoſitum numerum 2035102 verbis enunciare.

Ut autem numerus plurimis Figuris conſtans facillime enuncietur, præſtat eum in Periodos ſuas, necnon Semiperiodos, à dextra reſolvere, & harum ſingulas (ſeu plenas ſeu mutilas, cujuſmodi ſæpius erit, ultima omnium Semiperiodus, h. e. paucioribus quam tribus conſtans Locis) ſeorſim à læva efferre. V. g.

Periodi	Quadrillion.	Trilliones	Billiones	Milliones	Unitates
Semiperiodi	Chil. Un.	Chil. Un.	Chil. Un.	Chil. Un.	Chil. Un.
Figuræ	798, 160.	250, 704.	306, 025.	071, 980.	600, 021,
Voc. Num.	CDU, CDU.	CDU, CDU.	CDU, CDU.	CDU, CDU.	CDU, CDU.

Sic

Sextill. Quintill. Quadrill. Trillion. Billion. Million. Unitat.
Sic num. 1,000000,000000,000000,000000,000000,000000 denotat unum Sextillionem, qui numerus major habetur numero Arenarum Orbem Terræ componentium.

XX. Hujuſmodi eſt Notatio Figuralis Integrorum. Neque abſimilis eſt illa Fractionum ſive Partium Decimalium; quippe earum pariter Denominatores ex Locis Figurarum cognoſcuntur, ſed ordine inverſo juxta Typum ſequentem:

Integri.					Partes.				
Bill.	Milliones		Unitates		Unitariæ	Millioneſimæ		Bill^{mæ}.	
Un.	Chil.	Un.	Chil.	Un.	Un.	Chil.	Un.	Chil.	Un.
&c. 46.	909,	876.	543,	210	⌊12,	345.	678,	908.	63 &c.
DU.	CDU.	CDU.	CDU,	CDU.	DC,	UDC.	UDC,	UDC.	UD.

Ubi obſervandum eſt, 1mo. Integros à Decimalibus ſeparari notula [⌊], quæ ab officio ſuo appellatur *Separatrix*. Sed pro hac nonnulli uſurpant notulam [,], alii [.]. Notula quævis, ſed ſemper aliqua, Decimalibus eſt præfigenda.

2do. In Decimalibus quemlibet Locum minui verſus dextram ſubdecuplando; quemadmodum in Integris quilibet Locus augetur verſus ſiniſtram decuplando. Et heic non eſt prætereundum, quod tam Integris quam Decimalibus ſoleant nonnunquam inſcribi *Indices* intervalli, quo ſingulæ Figuræ diſtant à Loco Unitatis, hunc in modum,

$$\begin{array}{l} \quad 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0\ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}\ \bar{4}\ \bar{5}\ \bar{6}\ \bar{7} \\ \&c.\ 4\ 6\ 7\ 9\ 0\ 1\ 2\ 3\lfloor 4\ 6\ 5\ 9\ 8\ 7\ 3\ \&c. \end{array}$$

3^{tio}. Ob inverſum Locorum ordinem, Locum dexteriorem in Decimalibus pro poſteriori habendum eſſe; non ut in Integris, pro priori. Adeoque (quod dicitur de Integris §. XVIII, obtinet etiam in Decimalibus, mutatis mutandis, nempe) Figuræ alicujus Locus atque

atque ideo Denominator, immutatur à Figuris, vel etiam Cifris, ad lævam præpositis, non autem ad dextram postpositis. Putà in ∟6, ∟16, & ∟106 Figura 6 ter variat Locum, denotatque in numero primo 6 partes Decimas; in secundo, 6 partes Centesimas; in tertio, 6 partes Millesimas: Contra autem in ∟6, ∟61, & ∟601 Figura 6 nec Locum nec proinde Denominatorem variat; sed ubique idem valet, viz. 6 partes Decimas.

4to. Semiperiodum omnium primam in Decimalibus nunquam constare ex pluribus quam binis Locis, (puta D, C; per quas literas heic intellige, non ut in Integris, Decadas, Centuriasque, sed partes Decimas & Centesimas; uti & per U, partes Unitarias seu Monadicas, quasi dixeris Anglice **oneths.**) Hinc, cum in Integris 5000 h. e. 5 cum tribus Cifris præmissis denotet 5 Millia; in Decimalibus ∟005 h. e. 5 cum binis tantum Cifris præmissis indicat 5 partes Millesimas.

5to. Decimalium Classes (tametsi procedunt, atque ideo scribuntur, ordine inverso; tamen) verbis efferri solere eodem plane ordine, quo Integrorum Classes; V. g. Decimalis $\left\{\llcorner \begin{matrix}325674\\ DC,UDC,U\end{matrix}\right\}$ ita effertur, ac si procederent Classes Decimalium ordine contrario, viz. $\left\{\llcorner \begin{matrix}325674\\ CDU,CDU\end{matrix}\right\}$ h. e. effertur per trecentas viginti quinque Chiliadas, sexcentas septuaginta quatuor Unitates, partium Millionesimarum. Pari modo ∟56 efferri solet per quinquaginta sex partes Centesimas; non per quinque partes Decimas, & sex tantum Centesimas; uti postulat ordo Classium Decimalium. Cum autem utroque modo eadem Quantitas designetur, (nam quinque partes Decimæ æquivalent quinquaginta partibus Centesimis, seu $\frac{5}{10}$ æquivalent $\frac{50}{100}$) obtinuisse idcirco videtur usitata loquendi formula, quippe aliquanto

quanto expeditior. Etenim vides, quod ſecundum hanc, quotcunque fuerint Figuræ in numero Decimali, omnes unicam ſibi ſortiuntur Denominationem communem à Loco Figuræ ultimæ; non ſingulæ propriam à Locis propriis. Nempe 256 vulgo efferuntur per ducentas quinquaginta ſex partes milleſimas, idque expeditiùs, quam per duas partes Decimas, quinque Centeſimas, & ſex Milleſimas.

NB. In cæteris eadem eſt ratio Decimalium, atque Integrorum.

XXI. Notatio Fractionum Sexageſimalium nihilo diſcrepat à Notatione Integrorum, niſi quod partes diverſarum Denominationum ſingulas ſeorſim ſcribit, cum ſymbolis Denominationum ſuperne adſcriptis hunc ad modum, $29'$, $40''$, $53'''$, &c. Ubi per $29'$ denotantur 29 Scrupula Prima ſeu ſimpliciter Prima, hoc eſt, partes Sexageſimæ unius Horæ; per $40''$, 40 Secunda, h. e. partes Sexageſies Sexageſimæ unius Horæ; per $53'''$, 53 Tertia, h. e. partes Sexageſies Sexageſies Sexageſimæ unius Horæ, &c.

Et heic 1mo adnotandum videtur, quod eodem prorſus modo deſignentur Numeri Integri (quos vocant) diverſarum ſeu *plurium Denominationum*; puta $7^{l}.\ 14^{s}.\ 10^{d}.$ denotant 7 Libras, 14 Solidos, & 10 Denarios. Itidem $40^{an}.\ 312^{d}.\ 16^{h}.$ ſignificant 40 Annos, 312 Dies, 16 Horas. Certe cur non iſtiuſmodi Integri dicerentur Fractiones, (cum Hora ſit pars 24ta Diei, Dies pars circiter 365ma Anni; itidem Denarius pars 12ma Solidi, Solidus pars 20ma Libræ;) aut viciſſim, cur non Scrupula Prima, Secunda, Tertia, &c. dicerentur Integri plurium Denominationum; vix alia aſſignari poteſt ratio, niſi quod ſecus voluerit Uſus.

2do. Monendum eſt, quod per Integros (qui vulgo appellantur) plurium Denominationum intelli-

gendi ſint Integri, qui numerant Res plurium Denominationum. Nam aliquo ſenſu Integri univerſi ſunt plurium Denominationum, nempe Numeralium. E. g. 1697 Anni conſtituunt Integrum qui vulgo dicitur unius Denominationis, quippe ea omnia quæ numerantur, uno nomine dicuntur Anni. Poteſt autem idem numerus ſenſu non vulgari, ſed Arithmetico, dici Integer plurium Denominationum, nempe Numeralium, i. e. Unitatum, Decadum, Centuriarum, & Chiliadum. Quamobrem omnino diſtinguendum eſt inter Denominationes ipſorum Numerorum, & Rerum Numeratarum. Has deinceps nuncupabimus Denominationes *extrinſecas*; illas, *intrinſecas*.

XXII. Denique Notatio Fractionum Vulgarium convenit Notationi Integrorum, niſi quod unicuique Numeratori ſuum ſubjiciat (Lineola interjecta) Denominatorem Figuris expreſſum. Nam neque ex Loco Numeratoris eruendus eſt Denominator, (veluti in Integris; ſiquidem non, ut in his, ſic etiam in partibus vulgaribus certa ſit ac conſtans ratio, qua procedit Denominatorum ſeries;) neque aliud quodvis adhuc excogitetur, aut ſaltem uſurpetur, Denominatoris indicium. Quapropter duæ partes quartæ deſignantur per $\frac{2}{4}{}^{\text{Num.}}_{\text{Denom.}}$ & $\frac{16}{24}$ denotant 16 partes viceſimas quartas. Et ſic de cæteris.

Sed fortaſſe Loci Numeratoris & Denominatoris poterant aliquanto commodius immutari, ita ut $\frac{4}{2}{}^{\text{Denom.}}_{\text{Num.}}$ vel 2^4 ſignificarent duas partes Quartas. Etenim hoc pacto Notatio Fractionum Vulgarium propius accederet ad Notationem reliquorum omnium Numerorum, qui ſcribunt, aut ſupponuntur ſcribere, Denominationes ſuas ad Verticem; atque adeo tolleretur etiam ſaltem apparens aliquod diſcrimen, quod jam videtur eſſe inter Praxin Fractionum Vulgarium

garium aliorumque Numerorum, & quod non aliunde oritur quam à Notatione hactenus usitata, hoc est, à Loco illo quo scribi solet Denominator, in designandis Fractionibus Vulgaribus: uti infra loco suo monstrabitur.

XXIII. Hujusmodi est cum Integrorum tum Fractionum Notatio Figuralis, multo præstantior quam alia quælibet. Utitur enim Symbolis paucissimis, & tamen Numeros exprimit methodo non minus compendiosa, quàm Notatio Alphabetica; multo magis compendiosa, quam Notatio Romana, vel Græca illa, à qua orta est Romana. Ex. gr. [X]XXX[H]HHHΔΔΔIII, IƆƆMMMIƆCCCXXXIII, ηωλγ, 8833; Item X[H]H[Δ]ΔΔΔΔΠII, MIƆCXCVII, ᾳχϛζ, 1697. At Notatio Figuralis cæteras omnes in hoc longissime antecellit, quod cum illæ vix ascendant ad Millionem, aut ad summum ad Millionem Millionum; unica hæc plane admiranda ultra pergit ad Millionem Millionum Millionum Millionum &c; non aliis circumscribenda limitibus, quam quibus infinita ipsorum Numerorum series, hoc est, nullis.

Quamobrem mirari desinamus, Arithmeticam Figuralem ab Arabibus ex Oriente in Occidentem translatam, apud omnes Gentes Europæas tantopere invaluisse, ut Literalis raro adhibeatur in numeris saltem majoribus designandis, in numeris invicem componendis nunquam. Quocirca de Literarum praxi numerali quavis alia, quam Algebraica, prorsus tacebit Arithmeticæ Practicæ pars altera sive Logistica, ad quam nunc deducimur, post appositam Characterum Numeralium tam Literalium quam Figuralium Tabellam, una cum aliquot Annotationibus.

Classis 1ma *Characterum nempe Monadicorum.*			
א	α	I	1
ב	β	II	2
ג	γ	III	3
ד	δ	IV	4
ה	ε	V	5
ו	ϛ vel F	VI	6
ז	ζ	VII	7
ח	η	VIII	8
ט	θ	IX	9

Classis 2da *Characterum nempe Denariorum.*			
י	ι	X	10
כ	κ	XX	20
ל	λ	XXX	30
מ	μ	XL	40
נ	ν	L	50
ס	ξ	LX	60
ע	ο	LXX	70
פ	π	LXXX	80
צ	ϡ vel ϙ	XC	90

Classis 3tia *Characterum nempe Centenariorum.*			
ק	ρ	C	100
ר	σ	CC	200
ש	τ	CCC	300
ת	υ	CCCC	400
ך	φ	D vel IↃ vel IↃ	500
ם	χ	DC	600
ן	ψ	DCC	700
ף	ω	DCCC	800
ץ	ϡ	DCCCC	900

Classis 4ta *Characterum nempe Millenariorum.*			
א	α,	M vel CIↃ vel CIↃ	1000
ב	β,	IIM vel MM	2000
ג	γ,	IIIM vel MMM	3000
ד	δ,	IVM vel MMMM	4000
ה	ε,	VM vel IↃↃ	5000
ו	ϛ,	VIM vel IↃↃM	6000
ז	ζ,	VIIM vel IↃↃMM	7000
ח	η,	VIIIM vel IↃↃMMM	8000
ט	θ,	IXM vel IↃↃMMMM	9000

Reliquos omnes Characteres Millenarios exhibere molestum esset: Ex eorum paucis heic appositis facile innotescet Ratio describendi Numeros omnes qui deinceps sequuntur Millenarios ad Millionem usque:

י	ι,	CCIↃↃ	10000	ק	ρ,	CCCIↃↃↃ	100000
כ	κ,	XXM vel CCIↃↃ CCIↃↃ	20000	ר	σ,	IIↃↃCIↃↃↃ vel CCCIↃↃↃ CCCIↃↃↃ	200000
ל	λ,	IↃↃↃ	50000	ך	φ,	IↃↃↃↃ	500000
ם	ξ,	LXM vel IↃↃↃ CCIↃↃ	60000	ם	χ,	VICCCIↃↃↃ vel IↃↃↃↃ CCCIↃↃↃ	600000

CCCCIↃↃↃↃ 1000000.

NOTÆ.

NOTÆ.

Ad §. III, IV. Quæ ſupra in Sectionibus adſcriptis tradita ſunt, intelligi debent de Alphabeto, ſive Hebræo ſive Græco, quale in Grammaticis utriuſque Linguæ exhiberi ſolet: nam paulo aliter res ſe habet, ſi ad Criticum examen ſit revocanda.

Nempe 1mo quod ad Literas finales Hebræas attinet, deſiderantur illæ in Antiquo, & vere Hebræo, h. e. Samaritano Alphabeto; in quo itaque poſtremi quinque numeri Centenarii deſignantur per literam Tau, vel geminatam, vel priori alicui Centenariæ adjunctam. Unde fit, ut etiam (poſt receptas apud Judæos in Babyloniam abductos literas Chaldaicas, quæ conſtituunt jam vulgo dictum Alphabetum Hebræum, dicendum rectius Judaicum) in libris Judaicis, ſeu jam vulgo dictis Hebræis, priſtina illa numerandi formula nonnunquam occurrit; ut תק 500, תת 800, תתק 900.

2do. Quoad tres Notulas Græcas, ἐπίσημον Βαῦ ſeu Βοῦ, ἐπίσημον Κόππα, ἐπίσημον Τσιὸ δί, quod & vulgo perperam dicitur Σαμπί: ſi Critice loqui velimus, non eſt dicendum cum vulgo, tria illa ἐπίσημα ſeu Symbola Alphabeto Literali Græcorum fuiſſe ſuperaddita ad depingendos totidem numeros; ſed potius ex Alphabeto Græco Literali jam eſſe omiſſa, quia nunc dierum adhibentur ad depingendos tantum numeros, non etiam ſonos. Nam quod in antiquo Græcorum Alphabeto haberentur tanquam Literæ, i. e. tanquam Symbola non modo numerorum, verum etiam ſonorum, pluſquam probabile eſt, collato Alphabeto iſto antiquo cum Alphabeto Phœnicum ſeu Samaritano, à quo Cadmus fertur antiquas illas Literas Græcorum deduxiſſe. At progreſſu temporis, aucto jam Alphabeto Græco per additionem novarum quinque Literarum à Simonide Meliſſo (uti fama eſt) introductarum, viz. υ, φ, χ, ψ, ω: negligi videtur uſus Literarum Βαῦ, Κόππα, & Τσιὸ δί in vocibus deſcribendis, non item in numeris. Forte quia harum ſoni adeo affines jam fuere ſonis aliarum quarundam Literarum, ut per iſtas alias facile commode deſignari potuerint: cum vero Numeri per has aliaſque Literas deſcripti non adeo affines fuerint, ut ſine incommodo promiſcue uſurpari poſſent; hinc in numerando uſque retinentur Βαῦ, Κόππα, Τσιὸ δί: ſed deinceps videntur diſtinctionis

gratia

gratia appellari, non γράμματα, sed ἐπίσημα. Ex quibus demum ultimum vulgo nuncupatur Σαυπὶ, eo quod forma ejus ϡ forte refert partim Græcum Σὰν C, saltem conversum Ɔ, & partim Græcum Πῖ. Occurrit quidem in Eusebii Chronico scriptum ⋀, ⋀̄. Est autem revera efformatum à Samaritano Tsade, unde & dicendum est rectius Τσαδδὶ: quemadmodum Fαῦ & Κόππα tam nomen quam originem à Samaritanis Vau & Coph deducunt. Scribitur quidem Fαῦ non tantum per ϛ, sed & nonnunquam per F, quod ortum videtur ab Hebr. seu potius Chald. ו converso.

Ut hæc omnia magis fiant perspicua, consule Tabulam Literaturæ ab Erudissimo Bernardo editam, & in illa speciatim Literarum seriem I & II, VIII & IX.

Adde jam dictis, quod Numerus Millenarius per Literam expressus rarissime in Hebræorum scriptis reperiatur, sed fere semper *mille* per vocem integram אלף, *duo millia* per אלפיים, *plura millia* per אלפים cum Litera Numerali præmissa, ut ד׳ אלפים *quatuor millia*, &c.

Quinetiam Græci, siquando exprimendus occurrat Numerus Millenarius major, quam qui unica Litera millenaria describatur, præter communem methodum nonnunquam hac utuntur figura ⌣, cui ad dextram suprascribunt Decadas millium, ad sinistram Centurias millium, aliis numeris minoribus seorsim collocatis; ut apud Ptolem. l. 4. p. 150. (edit. Basil. A. D. 1538.) Πάσας δὲ ἡμέρας ⌣λα ϡ ᾳψπγ, i. e. omnes autem dies 310000 & 1783, sive conjunctim 311783. Et ibid. p. 102. συναγομένων ἡμερῶν ⌣κβ δχθ, i. e. dierum collectorum 224609. Ubi observes literas huic figuræ suprascriptas, Monadicas in Denarias, Denarias in Centenarias promoveri: nam in priori exemplo α valet 10, λ 300 viz. millia; in posteriori β 20, & κ 200, viz. millia; adeo ut si Literæ etiam Centenariæ suprascribantur, hæ jam Millenariæ factæ exprimerent Milliones; puta ⌣τμι βφζ denotarent 3452560, h. e. τ denotaret tres Milliones. Unde obiter liquet, quod à Græcis, saltem Mathematicis, excogitata esset Notatio Literalis, Figurali non longe absimilis. Nempe eadem Litera v. c. α, nude scripta significat unam Unitatem; sed virgula supposita, puta ᾳ, unam Chiliadem; porro scripta hunc

hunc ad modum unam Decadem Chiliadum. Jam ſi varii hi (atque etiam intermedii) Valores ejuſdem Literæ, puta α, non dignoſcendi fuiſſent per varias notulas diſtinctivas, ſed per varios tantum Locos Literæ iſtius; eadem omnino eſſet iſtiuſmodi Notatio Græca, atque Indica.

Ad §. VIII, IX, X. Ex iis qui aſſerunt Numerales Romanorum Characteres eſſe Figuras, non Literas; præcipuus eſt Ger. J. Voſſius, qui in Libello de Scientiis Mathematicis (edito una cum aliis ejus Opuſculis Amſtelodami A.D. 1650.) originem Characterum I, X, C, M, ſic deſcribit: "Unitatis "nota fuit linea ſimplex, ut & apud Græcos, quia ſimplex "ductus ſimplici numero conveniret. Denario autem duas "dedere (ſcil. Romani) lineas decuſſatas X; Centenario ter- "nas Ⅼ, pro quibus poſtea ad facilitatem manus maluere C. "Millenario autem datæ ſunt lineæ quinque, hoc modo Ⅰ Ⅰ Ⅰ "vel ad facilitatem manus ∞, item ↀ. --- Utcunque ingenioſa ſit hæc Conjectura; ut eam tanquam veram amplectamur, obſtat præter violatam in aſſignato Linearum numero Analogiam (ſcilicet cum Unitati dederit Voſſius lineam ſimplicem, Decadi duas, Centuriæ tres; oportuit eum non numero Quinquagenario, ſed Chiliadi dediſſe Lineas quatuor; ſed præter violatam hanc Analogiam obſtat) magna affinitas inter hanc Romanorum formam Arithmeticam, & Græcam illam, quæ per ſeptem (uti habentur) literas majuſculas numeros exprimit. Etenim credere non poſſum, Characteres Romanos eſſe originis tam diverſæ ab illa Græcorum, & nihilominus forte fortuito evenire, ut non modo Notatio Romana cum Græca illa jam memorata tam apte congrueret, uti jam notatum eſt § VIII; verum etiam ut bini Characteres Romani aperte eſſent (Græcorum ad inſtar) Literæ initiales vocum Numeralium quas deſignant; viz. C, M.

Quocirca viſum eſt heic loci paucis explicare, qualis nobis videtur fuiſſe Characterum Romanorum origo, quanquam inter ipſa præcepta Arithmetica nolumus Conjecturis indulgere. Et quo hoc luculentius fiat, viſum eſt una explicare originem ſeptem Characterum Græcorum, à quibus Romanam numerandi formam eſſe derivatam jam ſæpius dictum eſt.

Notum eſt igitur, ſimpliciſſimam, & ab illiterata plebe uſitatam, numerandi formam eſſe per lineolas rectas, Creta aut Carbone aut quavis alia materia idonea depictas, quæ denotant totidem Unitates. Hæc Notatio omnium prima

fuiſſe

fuiſſe videtur, tanquam ab ipſa Natura edocta, & apud omnes omnino gentes aliquamdiu obtinuiſſe. Quoniam vero res erat admodum moleſta, hac ratione numerum etiam exiguum denotare; hinc viſum eſt idem Artificium adhibere ad expediendam Numerorum Notationem, quod jam ante (uti videtur) erat adhibitum ad facilitandam ipſam Numerationem, ſeu Numerorum enunciationem. Nempe ut in ſtatuendis Claſſibus Numeralibus Cap. I. §. I. poſt novem priores Unitates non ultra numerantur ſimplices Unitates, ſed Unitatum Decades; atque ita poſt novem Decadas numerantur Centuriæ ad novem uſque; & deinde Chiliades &c. ſic placuit in ſtatuendis Symbolis Numeralibus novem priores Unitates depingere (ut prius) per lineolas totidem rectas, ſeu I toties repetitum; deinde adhibere novum Decadis ſymbolum, nonies repetendum; deinde aliud Centuriæ, aliud Chiliadis, &c. utrumque nonies pariter repetendum.

Quare, retento I antiquo & quaſi naturali Unitatis ſymbolo, voluerunt Græci ſymbola Δεκὰς ☉, Ἑκατὸν ☉, Χιλιὰς ☉, & Μυριὰς ☉ eſſe literas initiales vocum iſtarum, viz. Δ, Η, Χ, Μ. Et pari ratione voluerunt Romani, Græcos ſecuti, (retento etiam I naturali Unitatis ſymbolo) Decem, Centum, & Mille indicari per Literas ſuas initiales D, C ſeu ut olim ſcribebatur Ⅽ, & M ſeu ut olim ⅯⅯ, unde ↀ, CIↃ, cIↃ omnia numeri millenarii ſymbola. Cum vero nulla ſit vox ſimplex apud Romanos, quæ ſignificat Myriadem, hinc & litera nulla ſumpta eſt pro ſymbolo Myriadis: ſed quemadmodum Myrias exprimitur per Latinam vocem Mille cum adjecto vocabulo Decies; ſic & ſymbolum Romanum Myriadis deſumitur à ſymbolo Millenario cIↃ, cum additione aliqua, viz. ccIↃↃ denotat Myriadem, ſeu decem Millia; & pari modo cccIↃↃↃ denotat centum Millia, ccccIↃↃↃↃ mille Millia ſeu Millionem.

At vero nimiam adhuc afferebat moleſtiam continua repetitio ejuſdem I ab Unitate ad Decadem; itidem repetitio C à Decade ad Centuriam, &c. Quocirca placuit comminiſci alia ſymbola ad indicandum dimidium Decadis, Centuriæ, &c. (Nempe hoc pacto non eſſet opus repetitione cujuſvis ſymboli ultra quartam vicem: quod ſi ſymbola jam addita indicaſſent numerum quemvis alium inter Unitatem & Decadem præter 5, & ſic de cæteris; ſymbola qnædam eſſent repetenda ſæpius quam quater, quædam rarius.) Hunc igitur

tur in finem, (quippe Litera Π inchoat voces iſtas Numerales, quæ ſignificant apud Græcos dimidium Decadis, Centuriæ &c. puta Πέντε, Πεντήκοντα, Πεντακόσια, Πεντακιχίλια:) voluerunt Græci ſimplicem Π denotare 5, Π cum Δ incluſo h. e. ⟦Δ⟧ 50, itidem ⟦Η⟧ 500, ⟦Χ⟧ 5000.

Romani etiam Græcorum ad exemplum inter Unitatem & Decadem interſeruerunt Symbolum numeri quinarii; & ſic de cæteris. At in Symbolis hiſce ſeligendis à Græcorum exemplo parum deflexerunt. Videbantur enim Romanis Symbola nulla aptiora eſſe ad indicandum dimidium Decadis &c. quam dimidium Symboli Decadis &c. adeoque apud Romanos dimidium D, Ↄ, CIↃ, CCIↃↃ, CCCIↃↃↃ, CCCCIↃↃↃↃ, h. e. ᒐ, ᒪ, ⅮⅭ, ⅭⅮ, ⅭⅭⅮⅭ, ⅭⅭⅭⅮⅭⅭ, denotat reſpective 5, 50, 500, 5000, 50000, 500000.

Porro ex dimidiatis hiſce Symbolis, primum ᒐ mox abiit in Literam ſibi ſimilem V, ſecundum ᒪ pariter in Literam L, tertium ⅮⅭ denique in Literam D. Et hinc forte augurari licet de uſu X loco D ad deſignandam Decadem. Poſtquam enim ⅮⅭ abierit in D, viſum eſt diſtinctionis gratia diverſum aliquod Symbolum Decadis effingere. Quare uſurpato jam V pro ᒐ, duo V conjungere placuit hoc modo X, quippe hoc pacto novum Decadis Symbolum eſſet duplum novi Symboli Numeri quinarii, viz. X duplum V, ut prius D duplum ᒐ.

Talem fuiſſe arbitror originem Characterum Numeralium cum Græcorum tum Romanorum. Quæ ſecus dicuntur in ipſo textu, dicuntur ſecundum vulgarem opinionem, quæ (ſpeciatim) male deducit Græcum I à litera prima vocis Ἰος, cum non illa vox, ſed ἷς, recenſeatur tanquam prima vocum Numeralium. Præterea oſtenſum eſt non opus eſſe ut ſagaciores Græci excogitarent Unitatis Symbolum, cum jam ab infima & rudi plebe I ſeu Lineola Recta eundem in finem uſurpata fuerit.

Ad §. XI. I in antiquis Inſcriptionibus ſexies repetitum reperitur. Ibid. 2. Pari ratione Symbolum ∞ majoribus ſymbolis Millenariis præpoſitum ſe iis detrahit, ut ∞ 19000. Ubi nota in Inſcriptionibus antiquis vel vel notari pro CCIↃ. Item vel pro XX, & pro XXX.

Ad §. XII. Doctiſſ. *Beveregius* cap. 7. Arithm. Chronol. teſtatur, in nonnullis Inſcriptionibus Græcis ſe vidiſſe Numerum Minorem præcedentem, ut ΑΙ undecim, ΓΙ tredecim.

Ad §. XIV &c. ad XVIII. Europæi Arithmeticam Figuralem Arabibus acceptam referunt. Nempe Europæi reliqui eam acceperunt ab Hiſpanis, hi à Mauris, hi ab Arabibus. Ipſi autem Arabes non ſe, ſed Indos (quos Fodinam ſapientiæ nuncupat Abulpharagius Dynaſt. I.) Figuralem numerandi rationem excogitaſſe ferunt, quam idcirco Computum populi Indiæ, ſive Indorum Arithmeticam vocant.

Figuræ autem Indicæ ſaltem ut ab Arabibus in Europam introductæ, iſtiuſmodi ſunt, ١ , ٢ , ٣ , ٤ , ٥ , ٦ , ٧ , ٨ , ٩ ; fortaſſe novem priores Literæ Alphabeti Indici. Cui Conjecturæ favet affinitas Figurarum Indicarum cum prioribus novem Literis Alphabeti Arabici, quod conſule in Tabb. D. *Bernardi*. Certe veriſimillimum eſt Alphabetum Indicum (ad inſtar aliorum Orientalium) uſui Arithmetico olim inſervilſe, nec abſimili modo in tres Claſſes fuiſſe diviſum. Quod dum penitius perſpexit Indorum aliquis ſagaciori ingenio præditus, feliciter obſervavit literas tantum novem, modo ſingulæ tribus literalium Claſſium denominationibus eſſent communes, ad numeros omnes infra millenarium exprimendos æque pollere, ac ter novem literas, ſingulas ad denominationem unius Claſſis perpetuo alligatas. Res tota eluceſcet ex Typis binis ſequentibus invicem collatis, ubi pro literis Indicis uſi ſumus Græcis, tanquam notioribus.

Typ. 1^mus *juxta formam Alphabeticam vulgarem.*

Literæ Numerales 27.		Denominationes trium Claſſium	
α, β, γ, δ, ε, ϛ, ζ, η, θ ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο, π, ϟ ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω, ϡ	denotat	Unitates Decadas Centurias	unam, duas, tres, quatuor, quinque, ſex, ſeptem, octo, novem.

Typ. 2^dus *juxta formam novam ab Indo quaſi excogitatam.*

α β γ δ ε ϛ ζ η θ	denotat	unam duas tres quatuor quinque ſex ſeptem octo novem	Denominationes trium Claſſium Unitates, Decadas, Centurias.

Vides

Vides ex Typo ultimo, quod Figuræ Numerales sunt tantum novem, totidem scilicet quot sunt in Numeris Numeratores juxta §. III. 2. Cap. I. Sed & Cifra vulgo adnumeratur tanquam Figura decima, nempe Figura non numeri, sed absentiæ numeri, unde nonnullis placuit eam distinctionis causa nuncupare Figuram non significativam. Verum æquo jure etiam Punctum dici potest Litera, scilicet non significativa, quippe usuvenit idem adhibere in Chasmatis ad indicandum Literarum aut vocum defectum. Nec alienum est Exemplum allatum de Puncto, quippe pro Circellis hodiernis usi sunt Indi Punctis; puta 1 ч.. idem est, atque 1600. Profecto non abs re erit in Tabula subjecta, & ex Doctiss. *Beveregii* Arithmetica Chronologica desumpta, uno intuitu exhibere mutationes omnes, quas Figuræ Indicæ subiere apud Arabes, Persas, Turcas, atque etiam Europæos.

Figuræ Numerales

Indicæ		*Vulgares* Antiquæ	*Vulgares* Hodiernæ
ı		1	1
ᴘ	Turcis ᴛ	2	2
ᴡ		3	3
ᴇ		8	4
o	Arabibus ᴝ	ч vel ϧ	5
ч	Turcis ᴛ	6	6
v		ᴛ	7
ʌ	Turcis & Persis ᴛ	ᴝ	8
ᴑ		9	9
	Quibus addantur varia Cifræ Symbola		
•	Arab. o	⊖	o

Porro elapsi jam sunt Anni circiter cccc, ex quo Europæi Arithmeticam Figuralem acceperunt. Et istiusmodi Characteres non est reperire in libris Græcis Astrologicis, vel Logisticis, vel Computis Ecclesiasticis multo ante captam Constantinopolin, secundum *Vossium* in Lib. & Cap. jam citato. At vero multos ante annos in calculis Astronomicis usi sunt Græci Circello notato hunc in modum ō vel õ, loco Cifræ hodiernæ. Sic in Ptolem. lib. prædict. 4. p. 101.

τὰ ἑκάστῃ ἡμέρᾳ ἐπιβάλλοντα ϭϭϭϭ ια'''' μϛ'''' λθ''''', hoc est, Partes unicuique diei convenientes 0, 0, 0, 0, 11^{iv}, 46^{v}, 39^{vi}. Certe non desunt qui Figuras Numerales factas putant ex novem prioribus Græcis Literis corruptis, in quibus est *Conradus Dasypodius* in lib. 1mo Institut. Mathemat. necnon D. *Bernardus* in Tabula Literaturæ, quorum ultimus Figuras illas, quæ *Beveregio* habentur tanquam Indicæ, vult Arabicas esse ab Indicis efformatas. Vide Tabulæ istius Seriem VII.

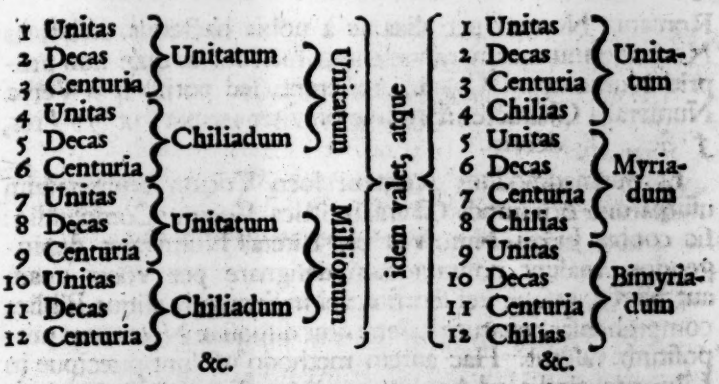
Ad §. XIX. Supra in Notis ad Cap. I. §. III. 4. observatum est, rationem decuplam Classium Numeralium immutari posse in quamvis aliam, puta quadruplam. Et ad rationem pariter quamlibet v. c. quadruplam Figuræ Numerales accommodari possunt, nempe quadraginta sex depinguntur juxta rationem Decuplam per figuras 46, juxta Quadruplam per figuras 232, h. e. 2 Quaterniones Quaternionum, qui conficiunt Triginta duo, 3 Quaterniones, qui conficiunt Duodecim, & 2 Unitates.

Præterea animadvertendum est, quod (tametsi obtinuit mos tribuendi cuilibet Periodo sex Locos sive Classes,) possit Periodus conflari ex Locis pluribus aut paucioribus, puta quatuor. Et hujusmodi Periodos describit *Archimedes* in Arenario suo, nempe quæ se invicem exuperant ratione Myresima; ita ut Periodus 1ma sit Unitatum, 2da Myriadum, 3^{tia} Myriadum Myriadum seu Bimyriadum, 4ta Myriadum Myriadum Myriadum seu Trimyriadum; & sic deinceps. At secundum hanc methodum grandis ille Numerus, qui supra in Sectione adscripta resolvitur in Periodos suas, ita esset resolvendus: viz.

Sepmyr.	Semyr.	Quimyr.	Quadrimyr.	Trimyr.	Bimyr.	Myriad.	Unit.
79	8160	2507	0430	6025	0719	8060	0021
DU	MCDU	MCDU	MCDU	MCDU	MCDU	MCDU	MCDU

Ubi vides, quod in hac forma nullæ sint Semiperiodi, adeoque aliquanto simplicior sit numeros notandi atque enunciandi ratio hæc Myresima ab *Archimede* excogitata, quàm Millionesima illa hodie passim usitata. Quod interim utraque in formula Periodorum, tam Myresima quam Millionesima, idem sit valor Locorum eorundem; constabit ex collatis binis Typis sequentibus

1 Uni-



Ad §. XX. 4. Quæ ſupra dicuntur de binis duntaxat Locis Semiperiodi primæ in Decimalibus, puta D, C; exponi debent ſecundum Praxin vulgarem, quæ per Lineam ſeparatricem ſecludit Unitatum Locum à Decimalibus. Quod ſi non Praxin, ſed rem ipſam perpendamus, conſtabit Unitatum Locum potius habendum eſſe tanquam intermedium inter Integros & Decimales, qui utroſque ex æquo reſpicit, nunc his, nunc illis adnumerandus. Nempe Unitas, quatenus conſideratur tanquam Unum quid Integrum, pertinet ad Locum primum Integrorum: quatenus autem conſiderari poteſt tanquam pars Unitaria (ſeu Anglice **oneth**) in quam Res quaſi dividi ſupponitur, ſpectat ad locum primum Decimalium. Atque ita Decimalium Semiperiodus prima (uti & ſequentes omnes) conſtabit ex Locis tribus, puta U, D, C.

Ad §. XXI. 2. Denominationes ipſorum Numerorum vocamus *Intrinſecas*, quia ingrediuntur eſſentias Numerorum; ita ut mutatis Denominationibus intrinſecis, mutentur etiam Numeri. V. g. Numeri 10 Denominatio eſt Decas; qua mutata in Denominationem aliam, puta Centuriam, extat illico Numerus etiam alius, nempe 100. Contra autem, Denominationes Rerum numeratarum dicuntur *Extrinſecæ*, quatenus non ingrediuntur eſſentias Numerorum. Nam Numeri iidem manent, mutatis utcunque Denominationibus extrinſecis. V. g. Numerus 10 unus idemque eſt Numerus, ſive 10 Annos denotat ſive 10 Horas, &c.

Ad §. XXIII. Cum in hoc Capite de varia Notatione Numerorum apud Hebræos, Græcos, & Romanos uſitata agatur; videtur haud prorſus reticendum, quod ab antiquis Roma-

Romanis Numeri per alias ac à nobis hactenus descriptas Notas nonnunquam repræsentati fuerint: at quæ non proprie Numerorum Characteres erant, sed potius ipsa Verba Numeralia Characteristice sive breviter scripta: ut ℑ· Tres, ſ· Sex, ∂c decem.

Et quemadmodum Romani loco Vocum Numeralium usurparunt istiusmodi Characteristica Vocum Compendia: sic contra Judæi Numeros per Literas Numerales depingendos, malunt nonnunquam designare per voces unam aut plures, easque vel seorsim vel in Sententia aliqua Biblica comprehensas, quarum Literæ utut dispositæ Numerum propositum valeant. Hac autem methodo usi sunt præcipue in Librorum titulis, ad Annum quo impressi sunt indigitandum. E. g. Pentateuchus in Bibliis Sacris à *Josepho Athia* editis impressus dicitur שנת לשוני עט ספר מהיר לפק i. e. Anno Computi minoris [*lingua mea est stylus scribæ prompti Psal.* 45.] Ubi voces עט ספר virgulis numeralibus superne notatæ annum indigitant, viz. 419um. Sic etiam Hagiographa ibidem impressa sunt, computi minoris Anno כתובים באצבע אלהים i. e. [*Scripta digito Dei*] viz. 420mo. Nam duæ priores literæ vocis כתובים tantundem valent. Denique Seder Tepilloth Hispanensis sive Judæorum Hispanorum Liturgia lepide impressa dicitur שנת הזאת i. e. *Hoc Anno*, ubi literæ הזאת indigitant annum 413um.

ע	70
ט	9
ם	60
פ	80
ר	200
	419

CAP.

CAP. III.

De quatuor Primariis Operationibus Arithmeticis generatim.

I. AD duo genera redigi poſſunt omnes Numerorum Operationes, in quibus tradendis verſatur Arithmetica *Logiſtica*. Sunt enim vel *Primariæ* ſeu *Simplices*, vel *Secundariæ* ſeu *Compoſitæ*, nempe à Simplicibus.

II. Operationes Primariæ revera ſunt tantum duæ, *Additio* & *Subductio*: Prioris Signum eſt +, poſterioris —. Sic $2+4=6$, hoc eſt, 2 plus 4 æquatur 6. Et $6-2=4$, h. e. 6 minus 2 æquatur 4. Præter has duas Operationes non datur alia ab his plane diverſa. Quod ſi velis numerum 4 (non ipſummet ſemel addi numero 2, ſed) indicare, quoties numerus 2 ſit ſibimet addendus, nempe quater; tum iſtiuſmodi Additio peculiari nomine dicitur *Multiplicatio*, cujus Signum eſt ×: ſic 2×4 (h. e. $2+2+2+2$) $=8$. Pariter ſi velis numerum 2 non ſemel tantum ſubduci à 6, ſed quotieſcunque ſubduci queat; tum iſtiuſmodi Subductio peculiari nomine vocatur *Diviſio*, cujus Signum eſt). (. vel ÷(. Sic 2)6(3 vel $\frac{6}{2}$(3, h. e. 2 poteſt ter ſubduci à 6, ſeu $6-2-2-2=0$. Et hinc vulgo recenſeri ſolent quatuor Primariæ Operationes, *Additio*, *Subductio* ſeu *Subtractio*, *Multiplicatio* & *Diviſio*: tametſi conſtat, Multiplicationem nihil aliud eſſe quam Multiplicem Additionem; Diviſionem, Multiplicem Subductionem.

III. Re-

III. Regulæ Generales Primariis quatuor Operationibus communes.

Reg. 1ma. Symbola quæcunque ejuſdem Denominationis (ſive intrinſecæ ſive extrinſecæ) directa ſerie ſibi invicem ſubordinentur; Puta, in Denominationibus intrinſecis Unitates ſubjiciantur Unitatibus, Decades Decadibus, &c. itemque in Denominationibus extrinſecis, Anni annis, Horæ horis, &c. Libræ libris, Solidi ſolidis, &c. Pariter in Fractionibus Decimalibus, Partes decimæ decimis, centeſimæ centeſimis, &c. In Sexageſimalibus Scrupula prima primis, ſecunda ſecundis, &c. In Vulgaribus Partes quintæ quintis, ſeptimæ ſeptimis, &c. Denique in praxi Algebraica A commode ſtatuetur ſub A, B ſub B, &c. Quare

Reg. 2da. Particularis Summa cujuſque Denominationis (tam extrinſecæ quam intrinſecæ) ubique reſolvenda eſt in totidem Denominationes ſubſequentes ſive ſuperiores, in quot reſolvi poteſt. Puta, 24 Unitates reſolvendæ ſunt in 2 Decadas & 4 Unitates, ſingulas ſeorſim in locis propriis deſcribendas juxta Reg. 1mam. Et 59 Quadrantes in Solidum unum, Denarios duos, & tres Quadrantes, &c. Item 25 Partes Centeſimæ in 2 Decimas & 5 Centeſimas. Et 72″ in 1′ & 12″. Et $15\frac{4}{}$ ſeu vulgo $1\frac{3}{4}$ in 3 Unitates & 3^4. Sed hæc Regula in praxi Algebraica vix locum habet.

Reg. 3tia. Inſtituantur Additio, Subductio, & Multiplicatio à dextra ſiniſtrorſum; Diviſio, ordine contrario. In praxi Algebraica perinde eſt, ſive à dextra ſive à ſiniſtra inſtituatur Praxis. At in Arithmetica cum Numeroſa tum Specioſa expedit Linea intermedia ſeparare Symbola data à quæſitis.

Reg. 4ta. Optimum Additionis Examen inſtituitur per Subductionem, & Multiplicationis per Diviſionem; & vice verſa. Nam quæ Additio conjungit,

ea

ea iterum disjungit Subductio. Quare si Totum per Subductionem resolvatur in easdem Partes, ex quibus simul additis prius erat compositum; tum proba est Additionis Operatio: & contra, si Partes illæ, in quas Totum per Subductionem jam est dissolutum, simul additæ conficiant idem Totum; tum probe instituta est Subductio. Puta si $3+4=7$, tum $7-4=3$ vel $7-3=4$. Et vicissim si $7-3=4$, tum $4+3=7$. Porro cum Multiplicatio nihil aliud sit quam alia Additionis forma; Divisio, alia Subductionis: hinc quæ Multiplicatio conficit, Divisio dissolvit, & vice versa, atque adeo alia aliam probat. Puta, si $2\times3=6$, tum $2)6(3$ vel $3)6(2$. Et vicissim si $3)6(2$, tum $2\times3=6$.

IV. Hæ sunt Regulæ Generales, quæ respiciunt omnes aut saltem plures Operationes Primarias. Sequuntur Regulæ Speciales, singulis Operationibus Primariis ordine suo jam tradendis propriæ.

NOTÆ.

Ad §. III. Siquis scire velit, cui Rationi innitantur Regulæ Generales supra in Sectione adscripta traditæ: dicendum est, tres priores Regulas (uti & alias passim Arithmeticas) deduci ex facilitate potius, quam ex necessitate Praxeos. Cogitandum enim minime est, Praxin nullo alio modo, quam qui in Regulis istis docetur, administrari posse; sed tantum, posse modo illo commodissime administrari. Nempe non est ad Praxin omnino necesse, figuras ejusdem Denominationis directa serie sibimet subordinari juxta Reg. 1. Generalem; aut Summam cujusque Denominationis in totidem Denominationes subsequentes resolvi, in quot resolvi potest juxta Reg. 2. Generalem; aut tres priores Operationes Simplices à dextra institui, &c. juxta Reg. 3. Generalem. Quæ omnia deinceps locis suis ostendentur.

Ratio Regulæ 4tæ Generalis inibi ostenditur. Et hæc sola Regula ex quatuor Generalibus deducitur ex necessitate Praxeos. Nam præter Operationum probationem ibidem memoratam

moratam non datur alia ſemper certa, & fallere prorſus neſcia. Quamvis datur interim alia multo expeditior, nempe Probatio *novenaria*, ſeu per 9, de qua fuſius agetur in Notis ad Cap. ſeq.

Porro cum ad obſervandam Regulam 2dam Generalem neceſſe ſit, ut accurate cognoſcatur Ratio, ſecundum quam variæ Rerum (ſaltem ad inſtitutum noſtrum, hoc eſt, ad Artes ingenuas ſpectantium) Denominationes procedunt: idcirco heic loci apponi curavimus Tabulas aliquot uſui illi inſervientes.

Tab. I.

Complectens varias *Temporis* Menſuras, quarum maxima ſaltem nobis uſitata eſt Annus (qui ab autore Julio Cæſare dicitur) Julianus.

Scrupulum	Hora	Dies	Hebdomas	Menſis Æqualis	Ann. Julianus
60					
1440	24				
10080	168	7			
40320	672	28	4		
525960	8766	$365\frac{1}{4}$	$52^{hebd.}\ 1^{d.}\ 6\ hor.$	$13^{m.}\ 1^{d.}\ 6^{h.}$	

NB. 1. Poteſt Tabula ulterius extendi, viz. ad Scrupula Secunda, Tertia, &c; nempe continue multiplicando ſeriem Scrupulorum proxime antecedentium per 60; Ex. gr.

$$\left.\begin{matrix}1'\\60'\\1440'\\\&c.\end{matrix}\right\}\times 60 \text{ dant Scrupula Secunda} \left\{\begin{matrix}60''\\3600''\\86400''\\\&c.\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}1'\\1\ hor.\\1\ d.\end{matrix}\right.$$

Item

$$\left.\begin{matrix}1''\\60''\\3600''\\\&c.\end{matrix}\right\}\times 60 \text{ dant Scrupula Tertia} \left\{\begin{matrix}60'''\\3600'''\\216000'''\\\&c.\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}1''\\1'\\1\ hor.\end{matrix}\right.$$

2. Menſis

2. Menſis *Æqualis* ita dicitur, quia ſemper conſtat diebus 28. Contra Menſis *Kalendarius* nuncupatur *Inæqualis*, quippe conſtat diebus inæqualibus, juxta verſiculos memoriales:

Ter denos numerat Menſis *Juvenilis*, *Aprilis*,
Septimus, & *Nonus*. *Reliquis* ſuperadditur *unus*.
Vult *viginti octo*, faciunt cui *Februa* nomen.

Et heic videtur non prætereundum, quod ubi dicimus Anglice **Twelve Months**, intelliguntur 12 Menſes Æquales, qui non exæquant Annum Julianum, ut liquet ex Tabula. Ubi vero dicimus a **Twelve-month**, intelligitur Spatium 12 Menſium Inæqualium, qui conficiunt Annum Julianum rotunde, hoc eſt, horis 6 ſupra dies Integros 365 neglectis, ſeu potius rejectis ad quartum quemque Annum, diebus idcirco $365 + 1$ conſtantem. Nam $6^h \times 4 = 24^h = 1^d$. Et hæc quidem ultima, & inæqualis, Anni forma eſt in Kalendariis deſcripta, & vulgo uſitata, tanquam commodior ad Uſum Civilem: prior autem, & æqualis illa in Tabula deſcripta, commodior eſt ad praxin Arithmeticam. Utraque demum in quolibet Quadriennio tantundem valet; viz. $365\frac{1}{4}{}^d \times 4 = 1461^d = 365^d \times 3 : + 366^d$.

Tab. II.

Complectens varias Partes, in quas *Circulus* dividi, atque iterum ſubdividi, intelligitur; & quibus metiuntur Aſtronomi ambitum Cœleſtem, Geographi Orbem Terraqueum, denique Mathematici Angulum quemvis datum.

	Scrup. Tertiũ	Scrup. Secundum	Scrupul. Primum	Gradus	
&c.	60				
&c.	3600	60			
&c.	216000	3600	60		
&c.	77760000	1296000	21600	360	Circulus

Et ſic deinceps ad Scrupula Quarta, Quinta, &c. continue multiplicando ſeriem Scrupulorum proxime præcedentium per 60; ut in Tab. I.

 NB. 1. Si-

NB. 1. Signum Gradus eſt [o] ſuperne adſcriptum numero dato; ut 15° denotat 15 gr ſeu 15 Gradus.

2. Gradus unus Circuli majoris Cœleſtis (h. e. qui totum Cœli ambitum diſtinguit in binas partes æquales) habetur æqualis Milliaribus Geometricis ſive Italicis, itemque Anglicanis, 60; Milliaribus Germanicis communibus 15, Milliaribus Hungaricis 10; Leucis Hiſpanicis communibus 18, Leucis Gallicanis communibus 24, Leucis Gallicanis grandioribus, itemque Leucis d' Une Heur de Chemin, 20. Atque ideo Scrupulum Primum, cum ſit pars 60ma Gradus unius, æqualis habetur 1 Milliari Italico, itemque Anglicano. At qui proportionem diligentius inveſtigarunt, uni Gradui tribuunt 69½ Milliaria Anglicana, h. e. Italica circiter 73. Eſt enim aliqua diſproportio inter Milliare Anglicanum & Italicum, quamvis adeo exigua ſit, ut tuto negligi & ſoleat & poſſit.

Tab. III.

Complectens varias *Longitudinum* Menſuras Anglicanas.

NB. Varias Longitudinum Menſuras à variis Corporis Humani Membris (quorum nomina etiamnum retinent) primario deductas fuiſſe ipſius Naturæ hortatu, pluſquam probabile eſt. Quoniam vero varia & incerta eſt Corporis Humani dimenſio, requiritur autem in Menſuris certa & conſtans Ratio: hinc unaquæque Gens ſuis Longitudinum Menſuris definitam præſcripſit extenſionem, & qualis interim à proportione media Corporis Humani non multum abhorret.

Hoc Conſilio Leges Anglicanæ definiverunt extenſionem Menſuræ iſtius, quæ manet (tanquam in exemplar) repoſita in Curia Londinenſi vulgo dicta Guild-Hall, & quæ ab officio ſuo nuncupatur lingua noſtra vernacula, the Yard Standard. Ad hanc enim cæteræ omnes Longitudinum Menſuræ Anglicanæ præſcriptam conſervare debent proportionem. Sic Pes Anglicanus eſt 3tia pars Menſuræ jam memoratæ; itemque Digitus eſt pars 36ma ejuſdem Menſuræ. Quare dimenſionem Digiti Anglicani minus recte deducunt nonnulli à 3bus granis hordeaceis; cum non ad grana illa, ſeu quævis alia, ſed ad Menſuram exemplarem Digitus noſter reſpectum habeat ſaltem immediatum. His præmiſſis, ſequitur ipſa Tabula:

Digitus

Digitus	Palmus	Spithama	Pes	Cubitus	*Ulna brev.	†Ulna long.	Passus	*Hexapeda	Pertica	Stadium	Milliare
3	3	1½	1½	2	1¼	1	1½	2¼	40	8	
9	4	2	2	2⅔	1⅓	1⅓	2	3	53⅓	10⅔	
12	6	3	3	4	2½	2	3	4½	80	16	
18	12	4	4	5⅓	3⅓	2⅔	4	6	106⅔	21⅓	
36	15	5	5	6⅔	4⅙	3⅓	5	7½	133⅓	26⅔	
45	20	6⅔	6	8	5	4	6	9	160	32	
60	24	8	8	10⅔	6⅔	5⅓	8	12	213⅓	42⅔	
72	66	22	16½	11	6⅞	5½	8¼	12⅜	220	44	
198	2640	880	660	440	275	220	33	49½	880	176	
7920	21120	7040	5280	3520	2200	1760	264	396	7040	1408	176
63360											

* Angl. a Yard.

† Angl. an Ell, Mensura solis pannis lineis adhibita.

* Angl. a Fathom.

Porro quo commodius evolvantur Libri cum Mathematici, tum Philosophici præsertim Physici, ab eruditis Viris sive Gallis sive Italis sive Belgis conscripti; visum est adhibere

bere in Tabella ſequenti proportionem Pedis Anglicani ad Pedem Italicum ſive Romanum, Pariſienſem Regium, &c.

Pedes aliquot uſitatiſſimi cum Pede Anglicano collati	*Pes Anglicanus in 1000 partes æquales diviſus*	*Pes Anglic. in Digitos, & partes Decim. Digiti diviſus*
		Ped. Dig. Decim. Dig.
Pes Londinenſis ſive Anglicanus	1,000	0 . 12 , 0
Pes Romanus ſive Italicus ex monimento *Coſſutii*	,967	0 . 11 , 6
Pes Romanus ſive Italicus ex monimento *Statilii*	,972	0 . 11 , 7
Pes Græcus	1,007	1 . 00 , 1
Pes Amſtelodamenſis	,942	0 . 11 , 3
Pes Leydenſis qui & vulgata voce dicitur Rhinlandicus	1,033	1 . 00 , 4
Pes Pariſienſis Regius	1,068	1 . 00 , 8

Rurſus 1 Pes Pariſienſis Regius } dividitur { 12 Pollices ſive Digitos,
1 Pollex } in { 12 Lineas,
1 Linea } { 12 Puncta.

NB. Siquis ſcire velit proportionem Pedis Anglicani ad Pedes aliarum Urbium præcipuarum, conſulat Tabulam huc ſpectantem ad calcem Compendii Mathematici D. *Jonæ Moore* Equitis; unde & Tabella præpoſita deſumpta eſt.

Tab.

Tab. IV.

Complectens varias *Superficierum* Menſuras, ſive Menſuras *Quadraticas*.

Digitus Quadrat.	Pes Quadrat.	Ulna brev. Quadrat.	Paſſus Quadr.	* Pertica brev. Quadr.	† Pertica long. Quad.	Jugerum Qu.
144						
1296	9					
3600	25	2,77				
39204	272,25	30,25	10,89			
1568160	10890	1210	435,6	40		
6272640	43560	4840	1742,4	160	4	

* Angl. a Pole. † Angl. a Rood.

Tab. V.

Complectens Menſuras *Cubicas*, ſive *Solidorum*.

Digit. Cub.	Pes Cub.	
1728		
46656	27	Ulna brevis Cubica.

Tab. VI.

Complectens *Pondo*, vulgo dictum a Pound Troy, ejuſque Partes, quibus examinari ſolet in Experimentis Philoſophicis Ratio Gravitatis, quam Corpora quævis duo ad invicem habent; puta, Aqua ad Hydrargyrum, &c. Aurum ad Argentum, &c.

* Granum minus	† Granum majus	Uncia	
24			
480	20		
5760	240	12	Pondo

* Angl. a Grain. † Angl. a Penny-Weight.

Tab.

Tab. VII.

Tabulis ſex prioribus adjungi poteſt ultimo hoc loco & altera Tabula, Complectens *Nummos Anglicanos* (utpote à Re Literaria haud prorſus, quanquam fortaſſe plus æquo, abhorrentes) eorumque varias ad invicem Rationes.

Quadrans	Denarius	Solidus	* Aureus	Marca	
4					
48	12				
320	80	$6\frac{2}{3}$			
640	160	$13\frac{1}{3}$	2		
960	240	20	3	$1\frac{1}{2}$	Libra ſive Mina

* Angl. a Noble.

CAP.

CAP. IV.

De Additione, Numerosa & Speciosa.

I. ADditio in unam *Summam* sive *Aggregatum* colligit Numeratores ejusdem Denominationis. Ut

	Integri	Partes		
		Dec.	Sexag.	Vulg.
1. In Arithm. Numerosa	20	L04	3′	5′′
	30	L05	4	3
	50	L09	7	8

	Species Affirmativæ.		Species Negativæ.	
2. In Arithm. Specioſa	A h.e. 1 a	&	—2A h.e. 2 —a	
	A	1	—3A	3
	2A	2	—5A	5

Ubi 1mo obſervandum eſt, Speciem dici *Affirmativam*, quæ *Rem* ipſam deſignat, & ſaltem ſupponitur notari ſigno + præfixo; *Negativam*, quæ deſignat *abſentiam* ſeu *defectum* Rei, & ubique notatur ſigno — præfixo. Ex. gr. 3 A denotent tres v. g. Solidos, & proinde —3 A denotabunt defectum totidem Solidorum. Sed quemadmodum Solidi 2 & 3 conficiunt 5 Solidos: ita & defectus Solidorum 2 & defectus Solidorum 3 conficiunt defectum 5 Solidorum.

2. Obſervandum eſt, *Indices Locales* (de quibus Cap. II. §. XX. 2.) imitari Species Algebraicas. Nimirum

mirum quotquot indigitant Locos (Integrorum h. e.) *ſupra* Unitatem, dicuntur Affirmativi, & ſupponuntur notari ſigno +, & pari modo ad invicem adduntur, ac Species Affirmativæ; quotquot autem indicant Locos (Partium Decimalium h. e.) *infra* Unitatem, dicuntur Negativi, & ubique notantur ſigno —, & pari modo invicem adduntur, ac Species Negativæ. Puta,

2 h. e.	+2	Item	—2 ſeu $\frac{2}{}$
3	+3		—3 $\frac{3}{}$
5	+5		—5 $\frac{5}{}$

II. Numeratores diverſarum Denominationum non in unam Summam colliguntur, hoc eſt, non adduntur proprie; ſed invicem appoſiti connectuntur tantum, per ſignum + intermedium, vel expreſſum vel intellectum. Ut

20	L16	12^s	$23'$	5^7
— 43	L52	10^d	15''	9^8
63	L68	$12^s. 10^d$	$23'. 15''$	$5^7. 9^8$
h.e. $60+3.$	$L6+L08.$	$12^s+10^d.$	$23'+15''.$	$5^7+9^8.$

A	2A	2A	
B	—2B	—2A	
A+B	2A (+) —2B	2A (+) —2A	
h.e. 1^a+1^b	2A —2B	2A —2A = 0	

5A		—5A
—2A		2A
5A (+) —2A		2A (+) —5A
h.e. 5A —2A = 3A		2A —5A = —3A.

Et in Indicibus Localibus	2	5	—5
	—2	—2	2
	0	3	—3.

Ubi

Ubi notandum est 1mo non modo Species dissimiles, verum etiam Species similes signis dissimilibus affectas, habendas esse pro diversis Denominationibus. Neque enim plus differt Canis ab Equo, puta A à B, quàm Canis à defectu Canis, puta A ab — A.

2. Notandum est, *addere defectum* Rei, nihil aliud esse, quàm *subducere Rem.* Quare 2A (+) — 2A = 0, hoc est, si lucratus fuerim 2 Solidos, & deinde amiserim 2 Solidos, patet jam mihi restare nullum Solidum, scil. ex iis quos lucratus eram. Quod si lucratus fuerim 5 Solidos, & deinde amiserim tantum 2 Solidos, patet etiamnum restare mihi 3 Solidos ex iis quos eram lucratus; h. e. 5 A (+) — 2 A = 3 A. Denique si lucratus fuerim 2 Solidos, & amiserim deinceps 5 Solidos; patet non modo Solidum nullum ex iis quos lucratus eram superesse; sed & contra incumbere mihi debitum seu defectum 3 Solidorum; h. e. 2 A (+) — 5 A = — 3 A. Sed interim 2 A (+) — 2B non potest contrahi in [0]: Subductis enim 2 Equis, possunt nihilominus restare mihi 2 Canes.

3. Notandum est, posse Numeratores etiam diversarum Denominationum proprie *addi*, h. e. in unam Summam colligi, ipsis diversis Denominationibus prius in unam reductis. Puta 1 fol. + 2 d. (converso Solido in 12 Denarios) conficiunt 14 d. Qua vero ratione istiusmodi Reductiones peragendæ sint, postea docebitur in Cap. *de Reductione.*

III. Quare in addendis Numeris plurium Denominationum, sive intrinsecarum, sive extrinsecarum, observanda est utraque Regula jam §. I. & II. tradita:

Nempe *primo* Numeratores uniuscujusque Denominationis seorsim addantur, & *deinde* eorum Summæ particulares Locis propriis (juxta Regulas Generales) subscriptæ sibi invicem apponantur; ex quibus ita appositis conficitur demum *Summa totalis.*

1. *Integri unius Denominationis extrinſ.*	2. *Integri cum Decimalibus*	3. *Integri plurium Denominationum extrinſ.* l. s. d. q.
79403	3794L236	17 + 13 + 04 + 2.
8956	5843	09 + 16 + 07 + 3.
67293	947L08	70 + 00 + 10 + 1.
5087	4720L7439	238 + 09 + 06 + 0.
200	48L5	48 + 10 + 03 + 0.
160939	10094L8599	384 + 10 + 07 + 2.

	4. *Integri cum Sexageſimalibus* ☉ d. h. ′	5. *Integri cum Fraction. Vulg.* Sol. 4 7
Ab ♈ ad ♎ iter	186 + 18 + 30	12 + 2 + 0
Ab ♎ ad ♈	178 + 11 + 19	9 + 0 + 2
Ab ♈ ad ♈ ſeu Ann. ☉	365 + 05 + 49	21 + 2 + 2.

NB. In Fractionibus Vulgaribus nihil refert, quonam ordine variæ collocentur Partium Denominationes, quippe nulla eſt mutua earum dependentia, ſed Partes uniuſcujuſque Denominationis immediate reſpiciunt Unitatem ſive Integrum illud, cujus ſunt Partes: Hoc eſt tam 4^4, quam 7^7 &c. valent Unitatem.

6. *Species Algebraicæ*

$$\begin{array}{r} 5a+7bc-6n-gf-xyz+p+4m \\ 2a-2bc+2n-3gf-d+t-4m \\ \hline 7a+5bc-4n-4gf-xyz-d+p+t. \end{array}$$

NOTÆ.

NOTÆ.

Ad §. I. Additio Fractionum Vulgarium juxta communem formam depictarum ita ſe habet, viz.

$$\frac{6}{12} + \frac{4}{12} = \frac{10}{12}.$$

Quæ Fractionum Vulgarium Additio à Tyronibus haberi ſolet diverſa ab Additione Numerorum aliorum, ſive Integrorum ſive Fractorum, non aliam ob cauſam, quam quod Notatio ſit diverſa. Nempe cum in aliis Numeris Denominatio ſemel tantum apponatur ad Verticem, heic cuilibet Numeratori ſuus ſubjicitur Denominator.

Et eandem ob cauſam (inter alias) Tyronibus videtur Additio Specioſa tam longe diſtare ab Additione Numeroſa; nempe quod Notatio Specioſa cuilibet Numeratori ſuam appingit Speciem h. e. Denominationem: unde & oritur Error (iſte in quem ſolent incidere Tyrones, nempe) addendi non tantum Numeratores, verum etiam ipſas Species, hunc in modum

$$\begin{array}{r} 2\,m \\ 7\,m \\ \hline 9\,mm. \end{array}$$

Quare ut conformitas Operationis Specioſæ cum Numeroſa magis fiat perſpicua, viſum eſt ſupra apponere Notationi Specioſæ uſitatæ aliam Notationi Numeroſæ magis congruam: Unde etiam conſtat, quod in Notatione uſitata Numerator [1] ſemper intelligatur præfigi Speciei, cui non præfixus adhæret Numerator alius; puta C eſt 1 C.

Ad §. II. Poteſt Additio etiam Indicum Localium ſignis diſſimilibus affectorum illuſtrari exemplo Bilancis & Ponderum. Nempe quemadmodum Bilanx, cui æquales utrinque applicantur Vires Motrices ſive Pondera æqualia, in æquilibrio manet, nec divergit aut in hanc aut in illam partem; quippe Vires æquales, cum ſint contrariæ, ſe mutuo deſtruunt: ſic etiam Figuræ alicujus diſtantia à Loco Unitatis, ſi ſit æſtimanda ex Indicibus æqualibus & contrariis v. c. 2 & $\overline{2}$ &c, nulla prorſus erit; quippe quantum Index Affir-

Affirmativus quaſi conatur attollere Figuram ſupra Unitatem, tantum Index Negativus æqualis conatur eandem detrudere infra Unitatem; atque adeo ſiſtitur Figura in ipſo Unitatis Loco h. e.

$$\begin{array}{r} 2 \\ -2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \text{ſeu} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \text{h. e. Loc. Unitat.}$$

Sin Figuræ alicujus diſtantia ab Unitatis *Loco* colligenda ſit ex Indicibus contrariis & inæqualibus, æſtimari debet ſecundum exceſſum Indicis Majoris (ſive Affirmativi ſive Negativi) ſupra Minorem. Pari ſcilicet ratione ac Ponderibus inæqualibus adverſas in Lances injectis, Ponderatio Ponderis majoris æſtimatur tantum quoad Exceſſum, quo Pondus minus exuperatur.

Ad §. III. Obſervatum eſt ſupra in Notis ad §. III. Cap. III. Regulas Generales in Sectione illa traditas conducere quidem ad praxin expediendam, non autem eſſe adeo neceſſarias, ut Praxis nullo alio modo abſolvi poſſit. Obſervationem illam exemplis aliquot Additionis heic loci comprobare non abs re erit. Quare

1. Additio poteſt peragi, Symbolis cujuſque Denominationis ſibi invicem non ſubordinatis, contra Reg. 1. Gen. Nempe ſi cuilibet Symbolo appingatur ſua Denominatio, uti fieri ſolet in Arithmetica Speciosa. E. g.

ut	2a	−4m	+n		ſic	2 Cent.	−4 Dec.	+1 Un.
	5n	+3a	+6m			5 Un.	+3 Cent.	+6 Dec.
	6n	+5a	+2m			6 Un.	+3 Cent.	+2 Dec.

vel 2 Sol. − 4 Den. + 1 Quadr.
5 Quadr. + 3 Sol. + 6 Den.
6 Quadr. + 5 Sol. + 2 Den.

Ubi vides quod Symbola (cum Speciosa tum Numerosa) ejuſdem Denominationis, quamvis nullo certo ordine ſint diſpoſita, ſed paſſim ſparſa, poſſint tamen in unam Summam hinc illinc colligi, alia methodo (non minus accurata, minus autem expedita) quam quæ in Reg. 1. Gen. deſcribitur.

2. Additio poteſt abſolvi, Summa particulari cujuſcunque Denominationis antecedaneæ in Denominationes totidem ſucceda-

ſuccedaneas, in quot reſolvi poteſt, non ſoluta, contra Reg. 2. Gen. Nempe

4s. 14d.	tantundem valet ac	5s. 2d.
5 . 15 .		6 . 3 .
9 . 29 .		11 . 5 .

Quoniam vero non uſu-venit, ne quidem in communi loquela, numerare Denarios ultra 12um, aut ad Summum 22um vel 23um; atque adeo, quoties effertur Summa major, puta Denariorum 29, 40, 50, 120 &c; iſtiuſmodi locutiones pariunt in animo Audientis Ideas Valoris deſignati confuſas, ſaltem multo minus diſtinctas, quàm ſi dixeris 2s. 5d; 3s. 4d; 4s. 2d; 10s &c: hinc ut evitetur iſta Idearum Æſtimativarum Confuſio ſive Indiſtinctio, (non ob neceſſitatem aliquam ipſius Operationis) Regula 2da Generalis adhibetur.

3. Additio poteſt inſtitui à læva dextrorſum, contra Reg. 3. Gen. Intellige Additionem Numeroſam, eamque vulgari modo depictam. Nam quoad Additionem Specioſam, itemque Numeroſam, ſi ad inſtar Specioſæ depingatur, (i. e. ſi cuilibet Figuræ ſua adhæreat Denominatio,) patet ab Exemplis paulo ante allatis, perinde eſſe unde inchoetur Operatio, viz. ſive ab additione 2a & 3a, itemque 2 Cent. & 3 Cent. &c. ſive ab additione n & 5 n, itemque 1 Un. & 5 Un. &c. ſeu denique ab additione 6 m & — 4 m, item 6 Dec. & — 4 Dec. Sed nec abſimili modo Additio Numeroſa Vulgaris inchoari poteſt à Serie Figurarum, ſive initiali, ſive finali, ſeu denique quavis intermedia.

Exemplum eſto

97464
8956
106420.

Eorundem Numerorum Additio poteſt aliàs abſolvi variis hiſce modis:

97464	Item	97464	Item	97464	&c.
8956		8956		8956	
9		10		13	
15		11		1511	
13		13		9 10	
11		15			
10		9			
106420		106420		106420.	

Vides

Vides eándem Summam Totalem tandem emergere, adhibita quavis Operandi ratione. Sed & vides etiam, Vulgarem Operandi rationem esse longe expeditissimam.

4. Optimum, quia certissimum, Additionis Examen instituitur per Subductionem juxta Reg. 4. Gen. At quoniam non minus molesta est ejusmodi Probatio, quam ipsa Operatio; solent Arithmetici Practici Probationem *Novenariam* minus quidem certam, sed multo expeditiorem, necnon satis tutam, (ubi non est fallendi studium,) plerumque in Operationibus examinandis adhibere. Nempe

Neglecta Locorum ratione, & abjecto (quoties licet) *Novenario* seu 9, si Residuus idem emergat & in Totali Summa & in Membris Additionis simul sumptis, recte perficitur Additio. Puta

$$\begin{array}{r} 97464 \\ 8956 \end{array} \Big\} 4$$
$$\overline{106420 - - 4.}$$

Brevitatem hujusce Probationis Novenariæ omnino dependere à neglecta Locorum ratione, nemo non videt. Quod vero Locorum ratio, sive posthabita sive non, nihil mutet, causa petenda est, partim ex eo quod numerus Novenarius sit *unitate* minor numero 10, partim quod *decupla* sit Locorum ratio. Inde fit, ut nullus alius numerus eadem proprietate gaudeat in ratione decupla; hinc, ut ne Novenarius quidem in ratione quavis alia, puta Nummorum, Temporis &c. Sed ut res clarius eluceſcat Tyroni Arithmetico, eam paulo fusius explicabimus. Quare

1. Ex jam dictis §. XV. Cap. II. constat, quid sit Locorum habere rationem. Hoc autem cognito facile innotescet Contrarium; nempe quod Locorum rationem negligere, nihil aliud sit, quàm supponere Figuram omnem (puta in numero 28, tam 2 quam 8) indicare Unitates. Unde autem evenit, ut abjecto quoties licet 9 ex 28, sive numerus iste denotat 2 + 8, i. e. 10 Unitates, sive 20 + 8, i. e. 2 Decadas & 8 Unitates, idem utrobique emergat Residuus, viz. 1, est nodus jam solvendus. Quare

2. Dico illud evenire, partim ex eo quod Novenarius sit *Unitate* minor numero 10. Hinc enim fit, ut, posito quotiescunque 10, toties ponatur etiam Novenarius, & toties insuper Unitas: ut,

10

10 =	9 & 1	i.e.	9 + 1
20 =	9 + 9 & 1 + 1		18 + 2
30 =	9 + 9 + 9 & 1 + 1 + 1		27 + 3
&c.			&c.

Unde liquet, quod respicere Locum Decadum, h. e. Numeratoris 1 in 10, 2 in 20, 3 in 30 &c. nihil aliud sit, quam ad Numeratorem datum pro ratione sua Numerali adjicere Novenarios, h. e. 9 ad 1, 9 + 9 ad 2, 9 + 9 + 9 ad 3 &c. Sed perinde est, seu nunquam addideris Novenarios, seu prius additos rursus abstuleris. Quare perinde etiam erit, sive neglexeris Locum Decadum (cum hoc sit, non addere Novenarios) sive respexeris eundem, abjectis Novenariis (cum hoc sit, Novenarios prius additos rursus auferre). Puta, $1 = 10 - 9 = 1$. $2 = 20 - \overline{9 + 9} = 2$. $3 = 30 - \overline{9 + 9 + 9} = 3$.

Et quod jam ostensum est de Loco Decadum, potest similiter ostendi de Loco quovis alio, puta Centuriarum, Chiliadum &c. Nam ut $1 = 10 - 9 = 1$, sic $1 = 100 - 99 = 1$, sic $1 = 1000 - 999 = 1$. Et ut $2 = 20 - \overline{9 + 9} = 2$, sic $2 = 200 - \overline{99 \times 2}$ i.e. $198 = 2$, sic $2 = 2000 - \overline{999 \times 2}$ i.e. $1998 = 2$ &c.

At vero idem non fiet, ablato quovis alio numero, præter Novenarium. Sumatur v.c. *Octonarius*, qui post Novenarium proxime distat à numero 10.

Proponatur 1.	Fiat 10.	10 −	8		= 2.
2.	20.	20 −	8 + 8	i.e. 16	= 4.
3.	30.	30 −	8 + 8 + 8	i.e. 24	= 6.
	&c.		&c.		

Vides post impositam Denominationem decuplam, & abjectos *Octonarios*, haud rursus emergere eundem numerum, qui in initio ponebatur, sed ubique numeri istius *duplum*.

Et pari ratione post abjectos *Septenarios*, supererit *triplum* numeri in initio propositi, v.g.

Proponatur 1.	Fiat 10.	10 −	7		= 3.
2.	20.	20 −	7 + 7	i.e. 14	= 6.
3.	30.	30 −	7 + 7 + 7	i.e. 21	= 9.
	&c.		&c.		

Sed quemadmodum ablatio Octonarii aut Septenarii &c. non potest adhiberi in examinandis Operationibus Numerorum

rorum ratione decupla crescentium; ita & ablatio Novenarii non obtinet in Probatione Numerorum ratione quavis alia præter decuplam exurgentium, puta Fractionum Sexagesimalium, aut Nummorum Anglicanorum, v.g.

$$\text{Proponatur}\left\{\begin{array}{l} \overset{d}{1.}\ \&\ \text{fiat}\ \overset{s}{1.}\ \text{i.e.}\ \overset{d}{12.}\quad 12 - 9 = 3, \\ \overset{,}{1.}\ \&\ \text{fiat}\ \overset{h}{1.}\ \text{i.e.}\ \overset{,}{60.}\quad 60 - 54\ \text{i.e.}\ 9 \times 6 = 6, \end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{non-1}\\ \text{ut oportuit.}\end{array}$$

At ubique Causa est eadem: Nempe quia neque Octonarius &c. est tantum Unitate minor numero 10, à quo denominatur Ratio decupla; neque Novenarius tantum Unitate minor Sexagenario, à quo denominatur Ratio Fractionum Sexagesimalium; aut Duodenario, à quo denominatur Ratio Solidi ad Denarium. Quocirca cum Probatio Novenaria in nulla alia Ratione præter decuplam locum habeat,

3. Dico brevitatem Probationis Novenariæ dependere partim etiam ex eo quod Locorum Ratio sit decupla, (nempe in Numeris unius Denominationis extrinsecæ, in quibus solis Probatio Novenaria locum habet). Hinc enim est, quod *Locos respicere*, nihil aliud sit, quam per Figuras propositas intelligere totidem (non Unitates, sed) Decadas, aut Centurias &c. Quod vero tantundem valeat, sive per 1, 2, 3 &c. indigitari velim Unitates, sive Decadas (&c.) Novenariis mulctatas, jam supra demonstratum est.

4. At tandem potest etiam Additio plurium Denominationum extrinsecarum, sive ratione quavis crescentium, examinari ope Probationis Novenariæ. Nempe si Numeri variarum Denominationum extrinsecarum propositi considerentur, tanquam Numeri totidem distincti, singuli unius tantum Denominationis, ac proinde seorsim in Summas colligendi, nulla habita ratione Regulæ Secundæ Generalis. Puta

$$\begin{array}{rrr} \overset{d}{186.} & \overset{h}{18.} & \overset{,}{30.} \\ 178. & 11. & 19. \\ \hline 365. & 05. & 49. \end{array} \quad \text{i.e.} \quad \begin{array}{rrr} \overset{d}{186.} & \overset{h}{18.} & \overset{,}{30.} \\ 178. & 11. & 19. \\ \hline 364. & 29. & 49. \end{array}$$

186.

186		18		30			Et ſic de cæteris.
178	--4	11	--2	19	--4.		
364	--4	29	--2	49	--4		

5. Denique reſtat oſtendendum, Probationem Novenariam utcunque expeditam, interim eſſe lubricam: Nempe patet, mutatis Figurarum Locis, una mutari earum Valorem: ſed nulla interim mutatio fit quoad Probationem Novenariam, quippe quæ non reſpicit Locos. Exempli gratia, 186 longe diſcrepat ab 816, vel 861. &c. quoad Valorem, cum interim abjecto Novenario, idem ubique extat Reſiduus viz. 6. Quoniam vero talis Figurarum tranſpoſitio in Calculos vix poteſt fortuito irrepere: hinc non eſt, cur rejiciatur prorſus Probatio Novenaria, quippe quæ poteſt, data opera, fallere; præſertim cum lubricitatem iſtam tantum poſſibilem abunde compenſet mira Probationis hujuſce brevitas.

Hactenus de methodo probandi Additionem, fuerit necne recte inſtituta. Quod autem Additio, modo recte peragatur, exhibeat veram Summam quæſitam; id tam clare conſtat ex ipſa Operatione, ut vix, aut ne vix quidem, locus ſit Demonſtrationi. Exemplum eſto

24
63
87.

Jam quod $3+4=7$, & $6+2=8$ (h. e. reſpectu Locorum, $60+20=80$), utrumque haud minus evidens eſt, quam Axioma quodvis. Et quod idcirco $8+7=\overline{6+2}$ plus $\overline{3+4}$, æque eſt evidens. Atqui eadem prorſus eſt ratio in Numeris quotcunque & quantiſcunque ſimul addendis; quippe plures quam binæ Figuræ non poſſunt eodem tempore adjungi.

NB. Quoties plurimi Numeri proponuntur ſimul addendi, præſtat (quo ſcilicet pauciores in Calculos irrepant Errores) primo tres tantum quatuorve priores ſimul adjungere, deinde tres quatuorve proxime ſequentes, (& ſic de cæteris,) Summis ad latus appoſitis, & tandem in unam Summam generalem collectis, hunc ad modum:

Ab Adamo Condito ad natum Sethum	Gen. 5. v. 3.	130	
Inde ad natum Enoshum	v. 6.	105	
Inde ad natum Cainanem	v. 9.	90	325
Inde ad natum Mahaleelem	v. 12.	70	
Inde ad natum Jaredum	v. 15.	65	
Inde ad natum Enochum	v. 18.	162	
Inde ad natum Methuselam	v. 21.	65	362
Inde ad natum Lamechum	v. 25.	187	
Inde ad natum Noachum	v. 28.	182	
Inde ad Diluvium Universum	Gen. 7. v. 6.	600	969
Quare ab Adamo seu Mundo Condito ad Diluvium juxta Computum Hebræum		1656	1656.

CAP.

CAP. V.

De Subductione ſeu Subtractione, Numeroſa & Specioſa.

I. SUbductio aufert ab invicem Numeratores ejuſdem Denominationis; atque ita Numerus poſt Subductionem *Reſiduus* oſtendit *Differentiam* Quantitatum datarum, ſive *Exceſſum* Quantitatis majoris ſupra minorem. Ut

3	3	L5	9	8 (15)	
3	2	L3	7	2	
0	1	L2	2	6	

A	3A	h. e.	3^{a}	$-5A$	h. e.	5^{-a}	Et in	3	-5
A	2A		2	$-3A$		3	Indi-	2	-3
0	A		1	$-2A$		2	cibus	1	-2

Sed	2A	Et	$-3A$		Et in	2	-3
	3A		$-5A$		Indi-	3	-5
	$-A$		$2A$		cibus	-1	2

Vides ubique Reſiduum eſſe Exceſſum Numeratoris majoris ſupra minorem, ſed in Subductione Specioſa vario ſigno notandum. Nam ſi Numerator minor ſubducatur è majore, tum Exceſſus ſervat ſignum Numeratoris *ex quo*; ſin major è minore, mutat. Operatio prior haud diverſa eſt ab Operatione Numeroſa, ideoque explicatione haud indiget. Poſterior illuſtrabitur Exemplis ſequentibus. Puta, ſi habuerim 2 Solidos, & acciderit mihi Debitum 3 Solidorum; patet, poſtquam ſolverim duos quos habui Solidos, reſtare

reſtare mihi defectum Solidi alterius, quo valeam totum abſolvere debitum. Contra, ſi debuerim 3 Solidos, & aliquis mihi (ſuſtulerit defectum 5 Solidorum, h. e.) dederit 5 Solidos, patet etiam poſt ſolutos quos debui 3 Solidos reſtare mihi 2 Solidos.

NB. Subductio Numeroſa, quoties Numerator major occurrit minori detrahendus, artificio utitur paulo inferius explicando.

II. Subductio non tam aufert ab invicem Numeratores diverſarum Denominationum, quam auferendos eſſe oſtendit per ſignum — intermedium. Ut

10	12^s	17^h	7^3
2	10^d	$32'$	5^2
$10-2$	12^s-10^d	$17^h-32'$	7^3-5^2.
A	0	2A	0
B	B	$-2B$	$-2B$
$A-B$	$0-B$	$2A(-)-2B$	$0(-)-2B$
h.e. 1^a-1^b	$-B$	$2A+2B$	$0+B$ ſeu B

2A	$-3A$
$-3A$	2A
$2A(-)-3A$	$-3A-2A$
h.e. $2A+3A=5A$	$-5A$.

Et in Indicibus	0	0	2	-3
	1	-2	-3	2
	-1 ſeu $\bar{1}$	2	5	-5 ſeu $\bar{5}$.

Sed heic animadvertendum eſt, 1mo, poſſe Numeratores etiam diverſarum Denominationum ab invicem auferri, ipſis Denominationibus prius in unam reductis. V. g. Quamvis *binæ Unitates* ſubduci nequeant ex *una Decade*, poſſunt tamen ſubduci ex *decem Unitatibus*, in quas reſolvi poteſt una Decas.

Et

Et pari artificio ubique utitur Subductio Numerosa, quoties Numerator subducendus excedit Numeratorem ex quo est subducendus. Nempe in Numeris quibusvis (præter Fractiones Vulgares, quarum de Subductione in hoc casu vide Cap. *de Reductione*) Unitatem Denominationis proxime majoris per *anticipationem* sumptam convertit in Numeratorem Denominationis proxime minoris æquivalentem. Puta

$12^{s}.00^{d}$	h. e.	$11^{s}.12^{d}$.	Item	$2^{h}.12'$	h. e.	$1^{h}.72'$
00.10		00.10		1.20		1.20
11.02		11.02.		0.52		0.52.

Unde obiter liquet, quod ultimus Numerator subducendus nunquam excedere debeat Numeratorem ex quo est subducendus, saltem quoad valorem Denominativum; (nam quoad valorem Numeralem, potest excedere:) H. e. Subductio Numerosa, quamvis sæpius subducere videtur *Numeratorem* majorem à minori, nunquam tamen subducit *Numerum* majorem à minori. Is enim est Numerus major, cujus extremus (non Numerator, sed) Denominator est major. Puta 210 major 98.

2. Animadvertendum est quod *subducere defectum* Rei, nihil aliud sit, quam *apponere* Rem. Quare $-,-A$ est $+A$, pari modo ac in sermone Latino itemque Anglicano *duo Negativa affirmant*. Unde constat Ratio Praxeos hujusce, $2A(-)-3A=2A+3A=5A$. Item $0(-)-B=0+B$. i. e. $+B$ seu B. Nimirum siqua Species Subducenda nullam habeat Speciem similem datam ex qua subducatur; tum Species ista intelligenda est subduci ex [0]. Quippe in Additione Specierum quæ se mutuo destruunt, plerumque omittitur [0], quæ tanquam Summa describi debuit. Puta

Quia

Quia in Additione	A + B A — B	i. e.	A + B A — B
	2A		2A 0
Ergo in Subductione	2A A — B	i. e.	2A 0 A — B
2A — A plus —, — B five	A + B	i. e.	2A — A pl. 0 —, — B A + B.

III. Ex iis quæ jam §. I. & II. dicta ſunt, conſtat Ratio ſubducendi datam Quantitatem quamvis Compoſitam ex data quavis altera Compoſita. Nempe Reſidui particulares per §. I. vel II. inventi, & juxta Reg. Gen. invicem appoſiti, conficiunt Reſiduum totalem.

1. *Integri unius Denominationis extrinſ.*	2. *Integri cum Decimalibus*	3. *Integri plurium Denominationum extrinſ.*
		l. s. d. q.
160939	10094L8599	384 + 10 + 07 + 2
79403	3794L236	17 + 13 + 04 + 2
81536.	6300L6239.	366 + 17 + 03 + 0.

4. *Integri cum Sexageſimalibus*				5. *Integri cum Fraction. Vulg.*
		d.	h. ′	Sol. 4 7
Ab ♈ ad ♈ ſeu Ann. ☉		365	+ 05 + 49	21 + 2 + 2
Ab ♈ ad ♎ iter ☉		186	+ 18 + 30	12 + 0 + 2
Ab ♎ ad ♈ iter ☉		178	+ 11 + 19	9 + 2 + 0.

6. *Species Algebraicæ*

7a + 5bc — 4n — 4gf — xyz — d + p + t
5a + 7bc — 6n — gf — xyz + p + 4m

2a — 2bc + 2n — 3gf — d + t — 4m.

NOTÆ.

NOTÆ.

Ad §. I. Fractiones Vulgares juxta formam communem descriptæ ab invicem subducuntur hunc ad modum,

$$\frac{8}{15} - \frac{2}{15} = \frac{6}{15}.$$

Ubi vides Operationem institui per solos Numeratores, plane ut in Integris aliisque Fractionibus, atque ideo diversam esse tantum Notationem Fractionum Vulgarium.

Ad §. II. 1. Præter methodum supra explicatam subtrahendi Numeratorem majorem ex minori homonymo; est & alia Methodus in Praxi usitata, nempe quæ istiusmodi Subtractionem peragit (non per anticipationem, sed) per æqualem Augmentationem tam Numeri Subducendi quam Numeri ex quo. Utraque Methodo invicem apposita & collata, clarius eluceſcet unius ab altera discrimen.

	s	d		s	d
Methodus prior per Anticipationem	3	4	seu	2	16
	1	7		1	7
	1	9		1	9.

	s	d		s	d
Methodus posterior per æqualem Augmentationem	3	4	vel	3	16
	1	7		2	7
	1	9		1	9.

Vides utraque Methodo eundem post Subductionem extare Residuum. Vides etiam, juxta Methodum posteriorem æqualiter augeri & Numerum Subducendum & Numerum ex quo. Nam 1 sol. = 12 d: sed 1 s additur ad Numerum Subducendum viz. 1, unde fiunt 2 Solidi; & 12 d adduntur ad Numerum ex quo viz. 4 d, unde fiunt 16 d. Vides denique Methodum priorem & in textu traditam esse saltem simpliciſſimam. Dat enim verum Residuum, etiam Numeris datis quoad Valorem haud immutatis. At Methodus posterior, ut verum exhibeat Residuum, prius immutat Valorem

lorem Numerorum datorum; puta $3^s + 4^d$ mutantur in ($3^s + 16^d$ i. e.) $4^s + 4^d$, & $1^s + 7^d$ in $2^s + 7^d$.

Et nota, quod (sive hac sive illa utaris methodo) nonnihil expediat Numeratorem Subducendum auferre (non ex Numeratore *ex quo* per additionem Numeratoris *anticipati* jam aucto, sed) ex solo Numeratore *anticipato*, & deinde adjicere Residuum inde ortum Numeratori *ex quo*, ut conficiatur Residuus Quæsitus. Ex. gr. Proponantur 17^s subducendi ex 1^l. 16^s. Facilius operaberis hunc ad modum, viz. 20^s (i. e. 1^l per anticipationem sumpta & in Solidos conversa) $- 17^s = 3^s$, & $3^s + 16^s = 19^s$; quam juxta methodum vulgarem, viz. $20^s + 16^s = 36$, & $36 - 17 = 19^s$ Resid. quæs.

Ad §. III. Quæ supra ostensa sunt de Additione Composita contra Regulas Generales peragenda, eadem ostendi possunt etiam de Subductione Composita; si digna viderentur, quibus repetendis immoraremur. Quare, omissis aliis, unum id ostendemus, qua scilicet ratione examinanda sit Subductio ope Probationis Novenariæ.

Nempe cum Numerus ex quo sit *Totum*; Subducendus & Residuus, *Partes*; patet, si post ablatos Novenarios idem Numerus restet tam in Numero ex quo, quam in Subducendo & Residuo simul sumptis, recte administratam esse Subductionem. Puta,

160939	- - - 1			10094L8599	- - - 0
79403	} - - 1			3794L236	} - - 0.
81536				6300L6239	
d h ′				d h ′	
Item 365 . 05 . 49		tantundem		364 . 29 . 49	
186 . 18 . 30		valent ac		186 . 18 . 30	
178 . 11 . 19				178 . 11 . 19.	
Sed 364 - - - 4		Et	29 - - - 2	Et	49 - - - 4
186	} - - 4		18 } - - 2		30 } - - 4.
178			11		19

CAP.

CAP. VI.

De Multiplicatione, Numerosa & Speciosa.

I. MUltiplicatio (seu Multiplex Additio) toties Numerum *Multiplicandum* sibimet addit, quoties jubet Numerus *Multiplicans*. Unde Multiplicans & Multiplicandus dicuntur uno nomine *Factores*; & Numerus ex iis ortus, *Factus* seu *Productus*.

	3	$\llcorner 05$	$9'$	2^8
	2	2	3	3
	6	10	27	6^8
h. e.	$3+3$.	$\llcorner 05+\llcorner 05$.	$9'+9'+9'$.	$2^8+2^8+2^8$
Simi-	A	6B	-9D	
liter	2	3	4	
	2A	18B	-36D	
h.e.	1^a+1^a.	$6^b+6^b+6^b$.	$9^{-d}+9^{-d}+9^{-d}+9^{-d}$.	

II. Quoniam vero Numerus omnis (juxta §. III. Cap. I.) constat Numeratore & Denominatore, hinc qui multiplicat *Numerum* per *Numerum*, multiplicat *Numeratorem* unius Numeri per *Numeratorem* alterius, & *Denominatorem* unius per *Denominatorem* alterius. V. g.

1mo. In	3	30
Integris	2	2
	6	60
h. e.	Unit. × Unit. = Unit.	Decad. × Unit. = Decad.
	3 × 2 = 6	3 × 2 = 6

30		300	
20		20	
600		6000	

h.e. Decad. x Decad. = Cent. Cent. x Decad. = Chiliad.
3 x 2 = 6 3 x 2 = 6 &c.

2do. In Fractionibus, ſpeciatim Vulgaribus:

$\frac{2^8}{3}$ h.e. $\begin{matrix} 8 \times 1 = 8 \\ 2 \times 3 = 6. \end{matrix}$ $\frac{6^8}{}$ M. $\frac{3^4}{2^3}$ h. e. $\begin{matrix} 4 \times 3 = 12 \\ 3 \times 2 = 6. \end{matrix}$ $\frac{}{6^{12}}$

NB. Ratio, cur in communi Praxi Fractiones Vulgares non alio unquam modo multiplicantur, Numeri vero Integri (&c.) nunquam hoc modo, ex eo petenda eſt, quod Loci indicent Denominatores Integrorum &c. non item Fractionum Vulgarium. Inde enim fit, ut qui uno Loco promovet Numeratorem aliquem Integralem &c. jam multiplicatum, promovendo idem faciat, ac ſi multiplicet Numeratoris iſtius etiam Denominatorem. Puta in exemplo ante allato, (viz. 30 x 20 = 600) 3 x 2 fit 6, qui cum non collocetur in Loco Secundo ſeu Decadum, in quo collocatus eſt 3, cujus eſt multiplus, viz. duplus, ſed promoveatur in Locum Tertium ſeu Centuriarum; patet idem inde evenire, ac ſi Denominator Multiplicandi 3 multiplicatus eſſet in Denominatorem Multiplicantis 2, h. e. Decas in Decadem. At hujuſmodi artificium adhiberi non poteſt in Multiplicandis Fractionum Vulgarium Denominatoribus, quippe qui à ratione Locorum nullatenus dependent.

3^tio. Similiter in Speciebus, ubi ſi Signa ſint ſimilia, Quantitas producta erit Affirmata: ſin diſſimilia ſint illa, hæc erit Negata. Nam Multiplicator Affirmativus *ponit*, Negativus *tollit*, Multiplicandum ſive Affirmativum ſive Negativum. Quare

+ in

$+$ in $+$ / $-$ in $-$ } dat $+$ h. e. { Res toties posita / Defectus Rei toties sublatus } tantundem valent.

$+$ in $-$ / $-$ in $+$ } dat $-$ h. e. { Res toties sublata / Defectus Rei toties positus } tantundem valent.

A	$-3A$	$4A^2$
A	$-2A$	$-A$
A^2	$6A^2$	$-4A^3$

h. e. $a \times a = a^2$ $\quad -a \times -a = a^2$ $\quad a^2 \times -a = -a^3$

$1 \times 1 = 1$ $\quad 3 \times 2 = 6$ $\quad 4 \times 1 = 4$.

AE		
A	h. e.	$ae \times a = a^2e$
		$1 \times 1 = 1$
A^2E		

AE		
AE	h. e.	$ae \times ae = a^2e^2$
		$1 \times 1 = 1$.
A^2E^2		

NB. 1mo. A^2 denotat $A \times A$ seu omisso signo A A, sed 2 A denotat $A \times 2$ seu $A + A$, & idem est discrimen inter A^3 & 3 A &c. 2do. A E denotant unam Quantitatem simplicem, adeoque ad Multiplicationem simplicem spectat, de qua heic loci agitur: sed $A + E$ denotant duas Quantitates, ac proinde pertinent ad Multiplicationem Compositam, de qua §. IV.

III. Numeri, quorum Denominatores sunt *heteronymi*, (cujusmodi habendi sunt tantum Numeri diversarum Denominationum *extrinsecarum*,) nequeunt aliter multiplicari, quam per signum $\times$ intermedium, vel expressum vel intellectum. Ut

4 pedes
2 digiti
4 ped. x 2 dig.

Sed per *Reductionem* etiam istiusmodi Numeri invicem multiplicantur. Puta (4 ped. i. e.) 48 dig. x 2 dig. = 96 dig.

Nec

Nec dissimilis est Multiplicatio Specierum dissimilium; habita Signorum ratione, ut prius.

	A	−A	3D	−4M
	B	−B	−5N	T
	A×B	A×B	3D×−5N	−4M×T
seu	AB	AB	−15DN	−4MT.

NB. Si Quantitates Simplices datæ exprimantur binis aut pluribus Speciebus dissimilibus, præstat in Producto non omittere intermedium signum ×. Nempe si AB multiplicetur in CD, scribatur AB×CD. Si enim scribatur ABCD, incertum erit, unde Productus iste ortus sit, an ex AB×CD, vel ex A×BCD, vel denique ex ABC×D.

IV. Perspecta Multiplicatione Simplici seu Quantitatum Simplicium, haud difficilis erit Multiplicatio Composita seu Quantitatum Compositarum. Est enim Multiplicatio Composita nihil aliud quam Multiplicatio Simplex aliquoties repetita, Productis ejusdem Symboli Multiplicantis seorsim descriptis, & tandem Productis omnibus particularibus in unum Productum totalem collectis, habita ubique *in Multiplicatione Numerosa* ratione Locorum, quibus investigandis inserviunt Indices Locales. Nam Indices utriusque Factoris simul additi conficiunt Indicem Facti, sive in Numeris tantum Integris, sive in Decimalibus tantum, seu denique in Numeris Mixtis. Sic

$$\overset{1\,0\,\bar{1}\,\bar{2}}{58.73} \times \overset{2\,1\,0}{200} = \overset{4\,3\,2\,1\,0}{11746}$$

Nam Index Figuræ 3 in 58.73 est $\bar{2}$; & Index Figuræ 2 in 200 est 2. Sed $2+\bar{2}=0$. Quare Factus ex 3×2, i. e. 6 in 11746, pertinet ad Locum [0] i. e. Unitatum. Cognito autem Loco Figuræ primæ in

in Facto aliquo, una innoteſcunt Loci Figurarum reliquarum, quippe qui ordine ſuccedunt.

$$\begin{array}{r} 23 \\ 2 \\ \hline 46 \end{array} \text{ h. e. } \begin{array}{r} 20+3 \\ 2 \\ \hline 40+6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} A+B \\ A \\ \hline A^2+AB \end{array} \text{ h. e. } \begin{array}{r} A+B \\ A \\ \hline A^2+AB. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 421 \\ 23 \\ \hline 1263 \\ 842 \\ \hline 9683 \end{array} \text{ h. e. } \begin{array}{r} 421 \\ 3 \\ \hline 1263 \end{array} + \begin{array}{r} 421 \\ 20 \\ \hline 8420 \end{array} \qquad \text{Collectim} \qquad \begin{array}{r} 9683 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 80.34 \\ 7.5 \\ \hline 40170 \\ 56238 \\ \hline 602.550. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A+B \\ A-C \\ \hline A^2+AB \\ -CA-CB \\ \hline A^2+AB-CA-CB \end{array} \text{ hoc eſt } \begin{array}{r} A+B \\ A \\ \hline A^2+AB \end{array} \text{ plus } \begin{array}{r} A+B \\ -C \\ \hline -CA-CB \end{array}$$

Collectim

$$A^2+AB-CA-CB.$$

$$\begin{array}{r} A+E \\ A+E \\ \hline A^2+AE \\ +AE+E^2 \\ \hline A^2+2AE+E^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} A-E \\ A-E \\ \hline A^2-AE \\ -AE+E^2 \\ \hline A^2-2AE+E^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} A+E \\ A-E \\ \hline A^2+AE \\ -AE-E^2 \\ \hline A^2-E^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} AB+CD \\ AB+CD \\ \hline A^2B^2+AB\times CD \\ +AB\times CD+C^2D^2 \\ \hline A^2B^2+2AB\times CD+C^2D^2. \end{array}$$

NB. Si

NB. Si in Multiplicatione Numerosa Factor alteruter adjunctas habeat ad dextram Cifras, administrari potest Operatio, neglectis inter Operandum Cifris, sed Facto tandem applicatis.

12	358	10	2.400
10	6000	10	.30
120	2148000	100	.72000 seu .72

Sin Cifræ fuerint Figuris Multiplicantibus immixtæ, possunt omnino negligi, h. e. & inter & post Operandum.

8013	72,003
5006	203,04
48078	288012
40065	216009
40113078	144006
	14619,48912.

NOTÆ.

Ad §. I, &c. Probatio Novenaria Multiplicationis sic se habet. Abjectis Novenariis non tantum ex utroque Factore seorsim sumpto, verum etiam ex utriusque post abjectos Novenarios Residuo invicem multiplicato, si Residuus inde tandem ortus exæquet Residuum Facti, Operatio proba est.

3496 - - 4 $7 \times 4 = 28$ - - 1
754 - - 7
2635984 - - - - - - - - - - 1.

Porro ad facilitandam Multiplicationis Numerosæ praxin adhibetur Abacus (qui, ut volunt, ab Auctore dicitur) Pythagoricus, seu vulgo Tabula Multiplicationis, quippe quæ exhibet Productos omnium Digitorum invicem multiplicatorum. Nempe novem Digiti ordine collocantur & ad Verticem & ad latus sinistrum Tabulæ; & in Cellulis quadratis intermediis exhibentur Producti Digitorum singulorum

rum Verticalium per ſingulos Laterales (aut vice verſa) multiplicatorum. Nimirum Cellula quæ efficitur concurſu Linearum ab utroque Digito dato (uno Verticali, Laterali altero, puta 9 x 7) ductarum exhibet utriuſque Productum (puta 63).

Tabula Multiplicationis.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

At vero ad expediendam Multiplicationem multo magis conducunt Virgulæ ſeu Laminæ (ab Inventore ſuo dictæ) *Neperianæ*, hoc eſt, variæ Abaci Pythagorici ſeries Laminis inſcriptæ ab invicem ſejunctis, atque adeo inter ſe quoquo modo permiſcendis. Unde fit, ut propoſito quovis Numero Multiplicando, Laminæ, quarum Digiti Verticales conficiunt Numerum propoſitum, mutuo appoſitæ momento pene exhibeant omnia (h. e. novem) Multipla Numeri Multiplicandi, hunc ad modum legenda atque adeo exſcribenda.

1. Triangulum inferius Laminæ primæ (h. e. ad dextram extremæ) pertinet ad Locum primum Multipli exſcribendi, Triangulum ſuperius Laminæ ultimæ (h. e. ad lævam extremæ) ad Locum ultimum: Rhombi intermedii ad Locos intermedios.

2. Figuræ in eodem Rhombo exiſtentes ſimul ſunt addendæ. Et ſi earum Summa nonniſi duabus Figuris exprimi queat, Figura prima exſcribenda eſt in Loco ad quem ſpectat Rhombus; ſecunda ad ſequentem Rhombum aut Triangulum promovenda.

Proponatur Numerus 3496 Multiplicandus per 754. Quæro Laminas, quarum Digiti Verticales ſunt 3, 4, 9, & 6. Hæ ordine dato invicem appoſitæ exhibent Numeri Multiplicandi Multipla univerſa, ac proinde quæſita. Ut autem facilius inveniatur quodvis Multiplum, apponi ſolet ad lævam Laminarum Numerum Multiplicandum componentium alia Lamina, dicta ab officio ſuo *Exponens*, quippe quæ exponit ſive indicat novem ſuis Figuris novem Multipla Numeri Multiplicandi è regione poſita. Videlicet in exemplo allato figura 4 Laminæ Exponentis indicat oppoſitum Numeri Multiplicandi 3496 *quadruplum*, nempe 13984; figura 5 *quintuplum*, nempe 17480; denique figura 7 *ſeptuplum*, nempe 24472.

Expo-nens	Laminæ *Neiperianæ*					
1	3	4	9	6	3496	3496
2	0/6	0/8	1/8	1/2	6992	754
3	0/9	1/2	2/7	1/8	10488	———
4	1/2	1/6	3/6	2/4	13984	13984
5	1/5	2/0	4/5	3/0	17480	17480
6	1/8	2/4	5/4	3/6	20976	24472
7	2/1	2/8	6/3	4/2	24472	———
8	2/4	3/2	7/2	4/8	27968	2635984
9	2/7	3/6	8/1	5/4	31464	

Eſt & alia Methodus celeberrima expediendi Multiplicationem per Numeros Artificiales, *Logarithmos* vulgo dictos. Sed horum Doctrinam viſum eſt immediate præmittere Tabulæ Logarithmicæ ad calcem Libri appoſitæ.

Denique ſunt & aliæ Multiplicationis Contractiones ope Indicum

Indicum Localium, in Logiſtica valde utiles, de quibus conſule Clmi *Oughtredi* Clavem Mathemat. Cap. IV. §. 5.

Ad §. III. Quamvis Numerorum Denominatores *intrinſeci* ſint inter ſe diverſi, (v. g. Decas diverſa à Centuria, unde in Additione Decades & Centuriæ nequeunt colligi in unum Aggregatum;) tamen omnes, quatenus ſunt *Unitatum* Denominatores, (nam v. g. Decades ſunt *Unitatum* Decades; Centuriæ, *Unitatum* Centuriæ &c.) habendi ſunt *homonymi*, adeoque poſſunt omnes invicem multiplicari; puta (non modo Decades per Decadas, Centuriæ per Centurias; verum &) Decades per Centurias &c. Et pari ratione in Fractionibus Decimalibus, itemque Vulgaribus, non tantum Decimæ per Decimas, Centeſimæ per Centeſimas (&c); Tertiæ per Tertias, Quartæ per Quartas (&c.) multiplicantur; ſed & Decimæ per Centeſimas (&c); Tertiæ per Quartas (&c). Nempe quatenus omnes ſupponuntur eſſe Partes ejuſdem Unitatis ſive Rei, ac proinde homonymæ. Secus enim, ſi (v. g.) 3^4 habeantur Partes Solidi, & 2^3 Partes Denarii, non poſſunt invicem multiplicari. Nam quemadmodum $3^s \times 2^d$ non conficient 6 ſive Solidos ſive Denarios: ſic pari ratione 3^4 Solidi $\times 2^3$ Denarii non conficient 6^{12} ſive Solidi ſive Denarii.

Et quemadmodum in Arithmetica Numeroſa, *Decades* v. g. & *Centuriæ* non poſſunt (juxta §. II. Cap. IV.) ſimul *addi* proprie, quia ſunt Denominatores *inter ſe diverſi*; poſſunt autem invicem *multiplicari*, quia ſunt Denominatores *homonymi*, nempe *Unitatum*: Sic & in Arithmetica Speciosa, etiamſi v. g. A & — A non poſſunt (juxta §. II. Cap. IV.) ſimul *addi* proprie, quia ſunt Denominatores *inter ſe diverſi*; poſſunt nihilominus invicem *multiplicari*, quia ſunt *homonymi*, nempe cum + A tum — A convenit in communi *nomine* per ſpeciem A deſignato.

Porro non abs re erit heic loci obſervare, quod, cum Multiplicatio efferri ſoleat per vocabulum [*in*], hinc vulgo Factores perperam intelliguntur *una immiſceri* ſeu *implicari*, aut alius in alium *intrudi*, aut alius alium *involvere*, aut alio quopiam modo *coaleſcere*; atque ita ex iſtiuſmodi *mixtura*, *implicatione*, *intruſione*, *involutione*, aut *coalitione* Factus demum oriri male intelligitur. Nam ex §. I. Capitis hujus liquido conſtat, Factum nihil aliud eſſe quam Aggregatum ſolius Numeri Multiplicandi aliquoties repetiti, atque adeo

Multiplicatorem non tam ipſummet ingredi Compoſitionem Facti, quam indicare quoties Multiplicandus ingreditur. Et hinc porro liquet, quod omnis ſaltem Multiplicator revera habendus ſit Numerus *Abſolutus*, h. e. nullius Denominationis *extrinſecæ*. Patet enim Multiplicatoris unicum eſſe officium, *numerare* vices, ſecundum quas Multiplicandus ſibimet eſt addendus: ſed ad *Numerationem* neutiquam ſpectat Denominatio quævis extrinſeca. Hinc qui multiplicat 4 pedes per 2 pedes, nihil aliud agit, quam qui multiplicat 4 pedes per 2, hoc eſt, tantummodo *bis* ponit 4 pedes, adeoque Factus viz. 8 ped. eſt Aggregatum ex ſolo Multiplicando, nempe ex 4 ped. + 4 ped. Et ſic tandem colligi poteſt Ratio, ob quam (juxta vulgarem loquendi formulam) Numeri homonymi poſſunt invicem Multiplicari, non item heteronymi. Puta 4 ped. x 2 ped. = 8 ped. ſed 4 ped. x 2 dig. = 8 neque pedibus neque digitis &c. Nempe 4 ped. x 2 ped. eſt 4 ped. x 2, ſed 4 ped. x 2 dig. eſt 4 ped. cum dig. x 2. In verbis ſic: Si utrique Factori appingatur eadem Denominatio extrinſeca, tum Multiplicatio verſatur circa Res ejuſdem Denominationis extrinſecæ; hoc eſt, (quia Multiplicator, uti ex jam dictis patet, revera habendus eſt Numerus Abſolutus ſeu nullius Denominationis extrinſecæ, idcirco) Multiplicandus habendus eſt tanquam Aggregatum Rerum unius Denominationis extrinſecæ: ſin uterque Factor diverſam habeat Denominationem extrinſecam, tum Multiplicatio verſatur circa Res diverſarum Denominationum extrinſecarum, h. e. ob rationem prius allatam Multiplicandus habendus eſt tanquam Aggregatum diverſarum Denominationum extrinſecarum. Cum autem Arithmetica non agnoſcat iſtiuſmodi Aggregatum, puta 4 ped. cum digitis, propterea neque admittet iſtiuſmodi Aggregati repetitionem, ſeu Multiplicationem.

Ad §. IV. Methodus inveniendi Locum cujuſque particularis Facti ope Indicum Localium certa eſt & univerſalis, adeoque in textu tradita. Praxis autem communis regi ſolet per hanc Regulam viz. Figura prima cujuſque particularis Facti eſt ejuſdem Loci, cujus eſt Figura Multiplicans, adeoque juxta Reg. 1. Generalem ſcribenda ſub Figura Multiplicante: Reliquæ ordine deinceps ad finiſtram. In Facto autem totali ſeponendi ſunt totidem Loci Decimales, quot ſunt in utroque Factore, collocatis (ſi opus fuerit) poſt notulam *Separatricem* Cifris ad complendum numerum Locorum Decimalium.

CAP.

CAP. VII.

De Diviſione, Numeroſa & Specioſa.

I. DIviſio (ſeu Multiplex Subductio) tollit *Diviſorem* ex *Dividendo*, *quoties* licet, unde Numerus per Diviſionem inventus dicitur *Quotus*.

3)6(2 — [05)[10(2

h. e. $6-3-3=0$ — $[10-[05-[05=0$

$9')27'(3$ — $2^8)6^8(3$

h.e. $27'-9'-9'-9'=0$ — $6^8-2^8-2^8-2^8=0$

Similiter A)2A(2 — $-9D)-36D(4$

h. e. $2^{a}-1^{a}-1^{a}=0$ — $36^{-d}-9^{-d}-9^{-d}-9^{-d}-9^{-d}=0$

NB. Eadem eſt Signorum ratio in Diviſione, ac in Multiplicatione Specioſa. Nempe ſi Signa data ſint ſimilia, Quantitas per Diviſionem inventa (h. e. Quotus) erit Affirmata; ſin diſſimilia ſint illa, hæc erit Negata. Cum enim Diviſio diſſolvat, quod Multiplicatio conficit; atque adeo hujus Factus ſit illius Dividendus, hujus Factores illius Diviſor & Quotus: hinc

	Diviſor	Dividendus	Quotus		Factores		Factus
In	+	+	+	quia in	+ in +	dat	+
Diviſione	−	−	+	Multiplicatione	− in +		−
	+	−	−		+ in −		−
	−	+	−		− in −		+

Et

Et pari ratione $A)2A(2$, quia $A \times 2$ dat $2A$; sed $A)A^2(A$, quia $A \times A$ dat A^2. Et idem est discrimen inter $2A)6A(2$, & $A^2)A^6(A^4$, &c.

II. Quoniam vero Denominator omnis constat ex Numeratore & Denominatore, hinc qui dividit *Numerum* per *Numerum*, dividit *Numeratorem* unius Numeri per *Numeratorem* alterius, & *Denominatorem* unius per *Denominatorem* alterius. V. g.

Primo, in Integris

$$30)60(2 \qquad 30)600(20$$

h. e. Decad. 3) Decad. 6 (Unit. 2 — Dec. 3) Cent. 6 (Dec. 2

Secundo, in Fractionibus, speciatim Vulgaribus:

$$2^8)6^8(3 \qquad 2^3)6^{12}(3^4$$

h. e. $\overset{8}{2})\overset{8}{6}(\overset{1}{3}$ — $\overset{3}{2})\overset{12}{6}(\overset{4}{3}$

Tertio, similiter in Speciebus:

$$A)A^2(A \qquad -2A^3)-6A^5(3A^2 \qquad A)AE(E$$

h. e. $\overset{a}{1})\overset{a^2}{1}(\overset{a}{1}$ — $\overset{-a^3}{2})\overset{-a^5}{6}(\overset{a^2}{3}$ — $\overset{a}{1})\overset{ae}{1}(\overset{e}{1}$

III. Numeri, quorum Denominatores sunt *heteronymi*, (cujusmodi habendi sunt Numeri tantum diversarum Denominationum *extrinsecarum*,) nequeunt aliter dividi, quam per Signum Divisionis, puta .). vel ÷, interpositum. V. g.

$4^{\text{ped.}})96^{\text{dig.}}$ vel $\frac{96^{\text{dig.}}}{4^{\text{ped.}}}$ Sed per Reductionem $4^{\text{ped.}}$ i. e. $48^{\text{dig.}})96^{\text{dig.}}(2.$

Eodem modo exprimitur Divisio Numeri *minoris* per *majorem*, puta 2 divisum per 3 est $3)2$, seu vulgo $\frac{2}{3}$. Et huc spectat Notatio Residui (siquis fuerit) ex

ex Dividendo, utpote qui Diviſore ſemper minor eſſe debet; viz. 3)8(2⅔. Et quia hujuſcemodi Diviſio ſemper denotat Fractionem Vulgarem, hinc forte evenit, quod Fractiones omnes Vulgares eadem forma depingi ſoleant. At Diviſio *Decimalis* formam hanc reſpuit, & minorem Decimalem dividuum (ſive fuerit ipſe Dividendus, ſive Dividendi tantum Reſiduus) Cifris uſque & uſque auget, donec vel totus exhauriatur, vel adeo exigua ſit pars *reliqua*, ut tuto queat omnino negligi. V.g. 8)L5 eſt 8)L5.000(L0625. Et 6)L5 eſt 6)L5.0000 &c. (L08333 &c. Porro ſi Fractio *Vulgaris* dividens non exhauriat totam Fractionem *Vulgarem* dividendam; quo evitetur Reſiduus, (h. e. Fractio Fractionis,) utraque reducenda eſt ad *homonymiam*, (uti docebitur in Cap. de *Reductione*,) & deinde inſtituenda eſt Diviſio.

Eodem demum modo, quo Numeri *heteronymi*, etiam Species *heteronymæ* ſeu diſſimiles dividuntur. Puta A diviſum per B eſt B)A ſeu $\frac{a}{b}$. 3BC diviſum per 2MN eſt 2MN)3BC ſeu $\frac{3bc}{2mn}$. Ubi non eſt omittendum, quod forma poſteriori depingi ſoleant etiam Fractiones Specioſæ, (hoc eſt $\frac{a}{b}$ & $\frac{3bc}{2mn}$ habentur Fractiones Specioſæ,) quæ per omnes quatuor Operationes primarias pari modo tractantur, ac Fractiones Vulgares ſaltem forma communi deſcriptæ.

IV. Perſpecta Diviſione Simplici, haud adeo difficilis erit Diviſio Compoſita, utpote quæ nihil aliud eſt, quam Diviſio Simplex aliquoties repetita. Nam Diviſio Compoſita poſtquam ex Dividendo ſufficientem Diviſori Dividuum diſtinxerit, & ſub ipſo Diviſorem ſubſcripſerit, vel ſaltem ſubſcriptum cogitaverit: ſingulas Figuras Diviſoris ex ſingulis ipſius Dividui Figuris ſupraſtantibus æqualiter, quoties fieri poterit,

poterit, tollit: Tum Divisore per Quotum inventum multiplicato, Factoque ablato ex Dividuo, Divisorem in Locum proxime sequentem promovet, novamque uti prius Divisionem instituit, donec totum Dividendum percurrerit. Locus autem cujusque particularis Quoti (vel Integralis, vel Decimalis) invenitur tollendo Indicem Figuræ dividentis ex Indice Figuræ divisæ. Quare cum [0] sit Index Loci *Unitatis*, & per Subductionem nihilo mutet Numerum *ex quo*; cumque (Divisore juxta methodum in hac §. præscriptam collocato) Figura quæque divisa stet, vel cogitetur stare, supra Figuram dividentem; hinc solet Regula efferri hunc ad modum: Quilibet Quotus particularis ejusdem debet esse Loci, cujus est Figura Dividendi, quæ stat, vel cogitatur stare supra Unitatis Locum Divisoris. Puta 58,73) 11746 (200. Nam si Divisor Dividendo subscribatur, aut subscriptus cogitetur; Figura 7 Dividendi stabit supra Unitatis Locum Divisoris, h. e. supra 8. At Index Figuræ 7 est 2, ideoque & Index Quoti inventi nempe 2, erit 2; h. e. Quotus pertinebit ad Locum Centuriarum. E. g.

$$\begin{array}{l} 43210 \\ 11746 \;(\; 210 \\ \;\;10\overline{12} \;\;\;\;\;\; 200 \\ 58{,}73 \end{array}$$

Exempla Divisionis Compositæ

2) 46 (23 h. e. 2) 40 (20, & 2) 6 (3

23) 46 (2 h. e. 2) 4 (2, & 3) 6 (2

2) 47 ($23\frac{1}{2}$ h. e. 2) 40 (20, & 2) 7 ($3\frac{1}{2}$.

A) $A^2 + AB$ ($A + B$ h.e. A) A^2 (A, & A) AB (B

$A + B$) $A^2 + AB$ (A h.e. A) A^2 (A, & B) AB (A

A) $A + B$ ($1 + \frac{b}{a}$ h.e. A) A (1, & A) B ($\frac{b}{a}$

9683

9683 (421 vel 23) 9683 (421
23 ...
92 92
48 23) 48
23 46
46
23 23) 23
23 23
23
00 00.

602550 (75 vel 8034) 602550 (75
8034 ...
56238 56238
40170 8034) 40170
8034 40170
40170
0 0.

$$A+E)A^2+2AE+E^2(A+E$$
$$A^2+AE$$
$$0 \quad AE+E^2$$
$$AE+E^2$$
$$0$$

$$A+B)A^2+AB-CA-CB(A-C$$
$$A^2+AB$$
$$0 \quad 0 \quad -CA-CB$$
$$-CA-CB$$
$$0.$$

NB. Si in Diviſione Numeroſa Diviſor adjunctas ſibi habeat ad dextram Cifras, omiſſis Cifris, & abſciſſis totidem ultimis Figuris Dividendi, in reliquis fiat Diviſio. In fine autem Diviſionis reſtituantur tum omiſſæ Cifræ tum Figuræ abſciſſæ.

1|00)47|20(47$\frac{20}{100}$

2|00)14|68(7$\frac{68}{200}$ 2|0)3673|2(1836$\frac{12}{20}$.

1

NOTÆ.

Ad §. I, &c. Regula Probationis Novenariæ in Diviſione eadem eſt, ac in Multiplicatione; modo pro Facto legatur Dividendus, pro Factoribus Diviſor & Quotus, Ex. gr.

3496)2635984(754.

Quare abjectis Novenariis

2635984 - - - - - - - - - - 1

3496 - - 4

754 - - 7 $4 \times 7 = 28$ - - 1.

Porro iiſdem artificiis, quibus Multiplicationis, etiam Diviſionis Numeroſæ Praxis facilitatur, nempe *Abaco Pythagorico, Virgulis* ſeu *Laminis Neiperianis, Logarithmis,* & *Indicibus Localibus.*

Abacus *Pythagoricus* ſiquidem exhibeat Multipla tantum Digitorum, commode adhiberi poteſt in Diviſione, tantum ubi Diviſor eſt Digitus, puta 9) 63. Hujuſmodi autem Diviſore (puta 9) in ſerie *Verticali* Abaci invento, in Cellula aliqua directe ſubjecta invenietur Dividendus, puta 63, cui directe opponetur in Serie *Laterali* Digitus, qui eſt Quotus quæſitus, puta 7. Si Diviſor ſumatur in Serie *Laterali*, tum Quotus erit in *Verticali.*

Laminæ *Neperianæ* conducunt ad expediendam Diviſionem quantumvis Compoſitam, hoc eſt, ubi Diviſor conſtat ex Figuris quotcunque. Nam Laminæ, quarum Digiti Verticales conficiunt Diviſorem datum, mutuo appoſitæ exhibebunt omnia Diviſoris *Multipla*, ac proinde ea, quæ conſtituunt Dividendum datum. Quare Dividendo dato (juxta §. IV. hujus Capitis) in Dividuum primum particularem Diviſori

visori sufficientem distincto, ex nudo intuitu Laminarum decernatur Multiplum Divisoris, quod constituit primum illum Dividuum particularem, h. e. *quoties* Divisor in Dividuo illo particulari continetur. Et pari ratione inveniatur particularis Quotus cujusque particularis Dividui subsequentis; adeoque Quotus totalis Dividendi totalis.

Exponens	Laminæ *Neperianæ*			
1	3	4	9	6
2	0 6	0 8	1 8	1 2
3	0 9	1 2	2 7	1 8
4	1 2	1 6	3 6	2 4
5	1 5	2 0	4 5	3 0
6	1 8	2 4	5 4	3 6
7	2 1	2 8	6 3	4 2
8	2 4	3 2	7 2	4 8
9	2 7	3 6	8 1	5 4

3496)2635984(754
...
24472

18878
17480

13984
13984

0

De Divisione per Logarithmos expedienda, vide doctrinam Logarithmorum ad calcem Libri traditam. Et de Contractionibus Divisionis ope Indicum Localium, consule Clarissimi *Oughtredi* Clavem Mathemat. Cap. V. §. 8.

Ad §. III. Si in Divisione Decimali idem Quotus ter emergat, nullo alio interveniente, tum Divisor nunquam totum exhauriet Dividendum: puta $6)_{L}50000(_{L}08333$ &c. h. e. $_{L}08333$ est minor Quoto vero, sed $_{L}08334$ est major, ac proinde Quotus inventus, cum à vero non distet intervallo $\frac{1}{100000}$, pro Vero haberi potest. Sin velis, licet propius in infinitum accedere ad Quotum Verum, adjunctis usque & usque Cifris. Puta $6)_{L}5000000000$ &c. $(_{L}08333333$ &c.

h. e. ,083333333 est minor Quoto Vero, sed ,083333334 major, & idcirco Quotus inventus à vero non distat intervallo $\frac{1}{1000000000}$.

Ibid. Quod Praxis Fractionum Specioſarum per omnes quatuor Operationes Primarias eadem ſit, ac Fractionum Vulgarium ſaltem forma Vulgari deſcriptarum, ex ſequentibus Exemplis conſtabit.

Add. $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = \frac{2a}{b}$. Subduct. $\frac{2a}{b} - \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.

Multipl. $\frac{a}{b} \times \frac{a}{c} = \frac{a^2}{bc}$. Diviſ. $\frac{a}{b} \) \frac{a^2}{bc} (\frac{a}{c}$.

Fractiones Specioſæ (uti & Vulgares) heteronymæ, puta $\frac{a}{b}$ & $\frac{a}{c}$, nequeunt ſimul addi, aut ab invicem ſubduci, (niſi per ſigna + & −,) priuſquam ad homonymiam reducuntur.

Poſſunt etiam Fractiones Specioſæ eodem modo deſcribi, quo Fractiones Vulg. in textu deſcribuntur; puta $a \overset{b}{+} a \overset{b}{=} 2a$, $a \overset{b}{\times} a \overset{bc}{=} a^2$. Quoniam vero ſæpe evenit, ut Fractiones Specioſæ ſint admodum compoſitæ, adeoque conſtent quamplurimis Speciebus, hinc commodior evadit Notatio Vulgaris; puta Fractio Specioſa $\frac{a^4 - 2b^2a^2 + b^4}{a^2 + b^2 + dc - fg}$ non poteſt commode deſcribi juxta aliam formam.

Ad §. IV. Communis Praxis in collocandis Quoti Figuris regi ſolet per Puncta ad diſtinguendos Dividuos particulares ſubnotata. Nempe totidem numerat in Quoto Locos, quot ſubjiciuntur Dividendo Puncta, hoc eſt, quot ex Dividendo diſtinguuntur Dividui particulares. Et ſi in Dividendo fuerint Loci aliquot Decimales, tum in Quoto totidem etiam Locos Decimales ſtatuit, quot cum Locis Decimalibus Diviſoris adæquant numerum Locorum Decimalium in Dividendo. E. g. 23)9683(421, & 80,34)602,550(7,5.

CAP.

CAP. VIII.

De Secundariis Operationibus Arithmeticis generatim.

I. OPerationibus Primariis jam expoſitis, tradendæ reſtant *Secundariæ*; quæ non ſunt Operationes novæ ſeu à Primariis penitus diverſæ, ſed vel ipſæ Primariæ peculiari aliqua ratione diſcriminatæ, vel ſaltem à Primariis diverſimode ordinatis compoſitæ.

II. In Operationibus Primariis Praxis Numeroſa ubique Specioſæ præmittebatur: in Secundariis autem ordo iſte paſſim immutabitur. Quemadmodum enim Praxis Numeroſa Tyronibus videri ſolet aliquanto facilior, adeoque erat hactenus præmittenda, ut lucem præberet Praxi Specioſæ nondum perſpectæ: ita Praxis Specioſa jamjam perſpecta, ſiquidem ſit multo accommodatior Operationibus nonnullis Secundariis explicandis, dehinc erit ſubinde præmittenda, ut Praxi Numeroſæ viciſſim præbeat lucem.

III. Et pari ratione Fractiones Vulgares ubique in Operationibus Primariis depictæ ſunt juxta formam (non Vulgarem, ſed) quæ oſtendit earum Praxin à Praxi Integrorum non eſſe diverſam, ideoque nec difficiliorem. Deinceps autem (Fractionum Vulgarium Praxi jam perſpecta) expediet aliquando uſurpare Notationem Vulgarem, maxime ubi inciderit ſermo cùm de Fractionibus Vulgaribus tum de Specioſis, quæ commodiſſime exprimuntur eodem modo, quo ſolent Fractiones Vulgares.

IV. Opera-

IV. Operationes Secundariæ utuntur, præter Signa quatuor Operationum Primariarum & Æqualitatis, etiam aliis Signis, tanquam Vocum compendiis. Nempe ⊏ vel > ſignificat *Majoritatem*; ⊐ vel <, *Minoritatem*; ∾ *Differentiam* duarum Quantitatum, ubi nondum conſtat, aut ſaltem nondum conſtare ſupponitur, utra Quantitas ſit major aut minor; :: *Proportionem eandem*, puta 2.4::3.6 h. e. Eadem eſt Proportio 3 ad 6, ac 2 ad 4, ſeu ut vulgo efferri ſolet, ut ſe habet 2 ad 4, ita 3 ad 6. Sunt demum alia nonnulla Signa, quæ cum alibi poſſint commodius explicari, heic conſulto omittimus.

V. Operationes Secundariæ (quemadmodum & Primariæ) ſtatui poſſunt *quatuor*. Nam ſpectant omnes ad doctrinam vel *Poteſtatum*, vel *Reductionis*, vel *Proportionis*, vel denique *Æquationis*. De ſingulis ſuo ordine.

NOTÆ.

Ratio ita ordinandi Operationes Secundarias, hæc eſt. Cùm Praxis ſæpe poſtulet, ut Poteſtas datæ alicujus Dimenſionis *reducatur* ad Poteſtatem alterius Dimenſionis: hinc Doctrina *Poteſtatum* prius erat tradenda, quam de Poteſtatum Dimenſionibus invicem permutandis commode agi potuerit in Cap. de *Reductione*. Reductio autem præmittenda erat Regulis *Proportionis*, quippe quæ ſæpius inſtitui nequit, ante Reductionem aliquam Terminorum aliquot datorum. Denique *Æquatio* ultimo loco ſtatuitur, utpote quæ à tribus prioribus Operationibus dependet. Sæpius enim verſatur circa *Poteſtates*, poſtulat *Reductionem*, & inſtituit *Proportionem*.

CAP.

CAP. IX.

De Involutione & Evolutione, ſeu de Geneſi & Analyſi Poteſtatum.

I. OMnis Species vel Numerus haberi poteſt tanquam *Radix*, à qua aliquoties *per ſe* multiplicata fiunt *Poteſtates*. Ex. gr. A × A = A A ſeu A^2, & A A ſeu A^2 × A = A A A ſeu A^3 &c. Item 3 × 3 = 9, & 9 (ſeu 3 × 3) × 3 = 27. Ubi A & 3 ſunt Radices, A^2 & A^3 Poteſtates Radicis A, 9 & 27 Poteſtates Radicis 3. Eſt igitur *Geneſis Poteſtatum*, quæ & una voce *Involutio* dicitur, nihil aliud quam *continua* alicujus Speciei vel Numeri *per ſe Multiplicatio*.

II. Poteſtas quælibet dicitur eſſe totidem *Dimenſionum*, quot vicibus involvit Radicem ſuam. Puta A^2 & 9 (h. e. A A & 3 × 3) ſunt duarum Dimenſionum, A^3 & 27 (h. e. A A A & 3 × 3 × 3) trium Dimenſionum &c. Ubi obiter vides, quod ex ipſa Notatione Specioſa Dimenſiones cujuſvis Poteſtatis Specioſæ ſtatim cognoſci queant: unde in A^2, A^3 &c. Figuræ Verticales nuncupari ſolent *Indices Dimenſionum*.

III. Poteſtas quælibet proprium ſibi ſortitur nomen, pro numero Dimenſionum ſuarum. Puta A^2 vel 9 eſt Poteſtas *Secundana*, A^3 vel 27 Poteſtas *Tertiana* &c. Ubi obiter animadvertendum eſt, quod *in Poteſtatibus Specioſis* Indices Dimenſionum inſerviant etiam ad indicandas Denominationes.

IV. Sunt autem & aliæ Poteſtatum appellationes à Quantitatibus *Geometricis* mutuatæ. Puta, Radix

appellari

appellari ſolet voce Geometrica *Latus*; Poteſtas Secundana, *Quadratum*; Tertiana, *Cubus* &c. Quare A q idem eſt ac A^2, A c idem ac A^3 &c. Item in Geneſi Poteſtatum à Radice *binomia* (h. e. quæ *binis* conſtat *Nominibus* ſeu *Notis*) perinde eſt, utra Notationis forma uſurpetur. Puta,

$$\begin{array}{l} A+E \text{ Latus.} \\ A+E \\ \hline Aq+AE \\ \quad AE+Eq \\ \hline Aq+2AE+Eq \text{ Quadratum.} \\ \quad A+E \\ \hline Ac+2AqE+AEq \\ \quad AqE+2AEq+Ec \\ \hline Ac+3AqE+3AEq+Ec \text{ Cubus. \&c.} \end{array}$$

Vel

$$\begin{array}{l} A+E \text{ Radix.} \\ A+E \\ \hline A^2+AE \\ \quad +AE+E^2 \\ \hline A^2+2AE+E^2 \text{ Poteſtas Secundana.} \\ \quad A+E \\ \hline A^3+2A^2E+AE^2 \\ \quad A^2E+2AE^2+E^3 \\ \hline A^3+3A^2E+3AE^2+E^3 \text{ Pot. Tertiana. \&c.} \end{array}$$

V. Operatio præmiſſa non modo ducit in notitiam Quadrati & Cubi à Radice A+E, ſed etiam eo ipſo edocet duo *Theoremata* generalia, unum de Geneſi Quadrati, alterum de Geneſi Cubi, à Radice quavis conſimili. Nam ſi A ſupponatur (uti ſupponi ſolet) Radicis

Radicis Nota *major*, E *minor*; tum A q + 2 A E + E q & A c + 3 A q E + 3 A E q + E c ſunt duo Theoremata in verbis ſic enuncianda:

Theor. 1. Quadratum à Radice Binomia conflatur ex Quadrato Notæ majoris, itemque minoris, ac inſuper ex intermedio Producto utriuſque Notæ invicem multiplicatæ duplicato. Ex. gr. Quadratum à Radice M + N conſtat ex M q + 2 M N + N q. Item Quadratum à Radice 57 (ubi 5, hoc eſt, reſpectu Loci ſui 50, eſt Nota major ſeu A; 7, Nota minor ſeu E) conſtat ex 50 q + bis 50 × 7 + 7 q h. e. 2500 + 700 + 49 = 3249.

Theor. 2. Cubus à Radice Binomia conflatur ex Cubo Notæ majoris, itemque minoris; ac inſuper ex intermediis Productis, tam Quadrati Notæ majoris per minorem quàm Quadrati Notæ minoris per majorem multiplicati, triplicatis. Ex. gr. Cubus à Radice M + N conſtat ex M c + 3 M q N + 3 M N q + N c. Item Cubus à Radice 57 conſtat ex 50 c + ter 50 q × 7 + ter 50 × 7 q + 7 c hoc eſt, 125000 + 52500 + 7350 + 343 = 185193.

VI. Quamvis Involutio Numeroſa (ſi per ſe ſpectetur) poteſt ſatis commode adminiſtrari juxta communem Multiplicationis Numeroſæ formam; tamen multo magis conducit ad elucidandam Evolutionis praxin, ſi adminiſtretur juxta formam *Theorematicam*, hoc eſt, Membris diverſis primo ſeorſim procreatis & exhibitis, ac deinde in unam Summam collectis. Poteſt autem Involutio Numeroſa hoc modo peracta negligere Locos Notarum Radicalium, (h. e. 50 q haberi poteſt inter Operandum tanquam 5 q, & 50 c tanquam 5 c &c.) ſi Membra ordine ſuo procreata ita ſubordinentur, ut Membrum quodque inferius ſtet uno Loco ulteriùs ad dextram, quàm Membrum proxime ſuperius. Cujus Praxeos Ratio ſatis conſtabit

ex collata Praxi, quæ respicit Locos Notarum Radicalium. Ex. gr.

Geneſis Quadrati à Radice Numeroſa Binomia.

Latus	57	Nam Locis Notarum Radicalium conſideratis	50+7
Aq	25		Aq 2500
2AE	70		2AE 700
Eq	49		Eq 49
	3249		3249

Geneſis Cubi à Radice Numeroſa Binomia.

	57	Nam Locis Notarum Radicalium conſideratis	50+7
Ac	125		Ac 125000
3AqE	525		3AqE 52500
3AEq	735		3AEq 7350
Ec	343		Ec 343
	185193		185193

VIII. Eodem modo peragitur Involutio Radicis Numeroſæ Multinomiæ: quatenus ſcilicet Radix Figurarum quotcunque concipi poteſt tanquam diſtincta in Radices Binomias, plures aut minores pro numero Figurarum ex quibus Radix propoſita componitur. Proponatur v. g. Radix 57209: Primo Poteſtas duarum Figurarum 57 quærenda eſt: Deinde ſumptis 57 pro A, & Figura proxima 2 pro E, quæratur Poteſtas à Radice (quaſi Binomia 570+2 ſeu) 572, eodem qui ante oſtenſus eſt ordine. Quod etiam in reliquis Figuris ſingulatim eſt faciendum.

Geneſis

Geneſis Quadrati à Radice Numeroſa Multinomia.

	5	7	2	0	9	Latus
Aq	25					
2AE	70					
Eq	49					
Aq	3249					
2AE	228					
Eq	4					
Aq	3271	8400				
2AE		102960				
Eq		81				
	3272	86968	1			Quadratum.

Geneſis Cubi à Radice Numeroſa Multinomia.

	5	7	2	0	9	Latus
Ac	125					
3AqE	525					
3AEq	735					
Ec	343					
Ac	185	193				
3AqE	19	494				
3AEq		684				
Ec		8				
Ac	187	149	248	000		
3AqE		883	396	800		
3AEq			1389	960		
Ec				729		
	187	237	601	580	329	Cubus.

VIII. Eandem ad formam (mutatis mutandis) inſtitui poteſt Geneſis Poteſtatis cujuſvis ſuperioris à Radice Numeroſa, cognitis prius ex Involutione Specioſa Membris, ex quibus componitur Poteſtas quæſita.

IX. QUia omnia reſolvuntur in eaſdem Partes, ex quibus coagmentantur: perſpecta jam Involutione ſeu Geneſi Poteſtatum, haud adeo difficilis erit *Evolutio* ſeu *Analyſis* Poteſtatum. Certe Analyſis Specioſa, puta Quadrati $Aq+2AE+Eq$ vel Cubi $Ac+3AqE+3AEq+Ec$, non modo in ſe nihil habet difficultatis, verum etiam Theoremata ſive Specimina exhibet pro Analyſi Poteſtatum homogenearum à Radice quavis Numeroſa.

Theor. 1. Quadratum reſolvitur, primo tollendo Aq, ſumpto interim Latere ejus A pro Nota majore Radicis quæſitæ; & deinde per Notam majorem duplicatam $2A$ dividendo Membrum proximum (commate idcirco interpoſito à Membris reliquis ſejunctum) $2AE$. Nam $2A)2AE(E$, & E multiplicatum per Diviſorem $2A$, facit $2AE$, item $E \times E$ facit Eq. Subductis autem $2AE+Eq$ ex Reſiduo Quadrati poſt ſubductum Aq, nihil reſtat: idcirco Radix quæſita eſt $A+E$.

Puta,

$$\begin{array}{rl} & Aq+2AE+Eq(A+E \\ & Aq \\ \hline 2A) & 0+2AE,+Eq \\ & \quad 2AE+Eq \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

Quare proponatur Analyſis Quadrati (3249 ſeu Membris nondum ſimul additis) $2500+700+49$.

Aq Sub-

2500 + 700 + 49 (50 + 7

Aq Subducend. 2500

2A)2AE,+Eq 100) 0 + 700,+49

2AE+Eq Subducend. 700+49

0

Theor. 2. Cubus reſolvitur, primo tollendo Ac, ſumpto interim Latere ejus A pro Nota majore Radicis quæſitæ; & deinde per Quadratum Notæ majoris triplicatum 3Aq dividendo Membrum proximum (commate idcirco interpoſito à Membris reliquis ſejunctum) 3AqE. Nam 3Aq) 3AqE (E, & E multiplicatum per Diviſorem facit 3AqE, item Eq × 3A facit 3AEq, & E × E × E facit Ec. Subductis autem 3AqE + 3AEq + Ec ex Reſiduo Cubi poſt ſubductum Ac, nihil reſtat: idcirco Radix quæſita eſt A + E.

Puta, Ac+3AqE+3AEq+Ec(A+E

Ac

3Aq) 0 + 3AqE,+3AEq+Ec

3AqE+3AEq+Ec

0

Quare proponatur Analyſis Cubi (185193 ſeu Membris nondum ſimul additis) 125000 + 52500 + 7350 + 343.

125000 + 52500 + 7350 + 343 (57

Ac Subducend. 125000

3Aq)3AqE,&c. 7500) 0 + 52500,+7350+343

3AqE+3AEq+Ec Subducend. +52500+7350+343

0

X. Nec

X. Nec diversa est Praxis, Membris in unam Summam simul additis, nisi quod Membri cujusque sedes in ipsa Summa prius sit distinguenda. Id autem fieri solet, posito Puncto sub Figura *dexterrima*, & Punctis aliis sub Figuris exinde *alternis* Quadrati, puta 3249; *post-alternis* autem seu *tertiis* Cubi, puta 185193. Nam patet ex §. VI. Membro cuique diverso sive Quadrati sive Cubi proprium assignari Locum, (nempe Figura prima cujusque Membri diversi ordine collocata uno Loco ulterius ad dextram,) adeoque cùm Quadratum omne constet ex tribus Membris diversis, Cubus ex quatuor; illud tres ad minimum occupare Locos, hunc quatuor. At Punctatio alternata distinguit tres Locos sive Figuras pro quolibet Quadrato, nempe duas punctatas (quarum dextra semper pertinet ad E q, sinistra ad A q) & unam intermediam, quæ semper pertinet ad 2 A E: Punctatio item post-alternata distinguit quatuor Locos sive Figuras pro quolibet Cubo, nempe duas punctatas (dextram ad E c, sinistram ad A c pertinentem) & duas intermedias, dextram ad 3 A E q, sinistram ad 3 A q E pertinentem. Denique notandum est, Punctatione quoties licet facta, Figuras omnes post Punctum ultimum pertinere respective ad A q vel A c: item quot sunt Puncta, tot esse Notas Radicis quæsitæ, nempe quia Loci punctati semper pertinent ad Potestatem à Notis Radicalibus singulatim sive seorsim sumptis, ac proinde quot sunt Potestates istiusmodi, tot erunt Notæ Radicales. Sic Radix Quadrati 3271869681 itemque Cubi 18723760158032 9 constat ex quinque Notis, puta 57209.

His præmissis, proponatur Analysis Quadrati 3249, itemque Cubi 185193. Primo sedes Membrorum in utraque

utraque Poteſtate data Punctis diſtinguantur, & deinde inſtituatur Analyſis (uti prius) juxta Theor. primum & ſecundum Analyticum. Ex. gr.

Analyſis Quadrati à Radice Binomia.

3249(57
Aq (h. e. Quadr. maximum in 32) Subducend. - - - 25
2A)2AE + E. 10) 749
2AE 70
Eq 49 } Subducend. - - - - - 749
749 } 0

Analyſis Cubi à Radice Binomia.

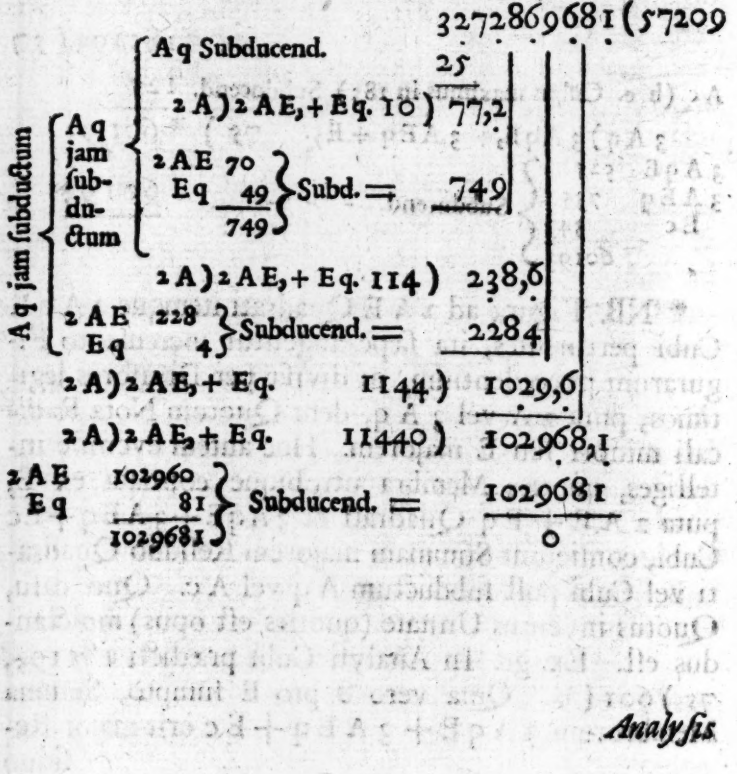
185193(57
Ac (h. e. Cubus maximus in 185) Subducend. 125
3Aq)3AqE + 3AEq + Ec. 75) * 60193
3AqE 525
3AEq 735 } Subducend. - - - - 60193
Ec 343 } 0
60193

* NB. Figuræ ad 2AE Quadrati itemque 3AqE Cubi pertinentes, ita ſæpe augentur incremento Figurarum præcedentium, ut diviſæ per Diviſores legitimos, puta 2A vel 3Aq, dent Quotum Nota Radicali minori ſeu E majorem. Hoc autem eveniſſe intelliges, quoties Membra utrobique conflata ex E, puta 2AE + Eq Quadrati & 3AqE + 3AEq + Ec Cubi, conficiunt Summam majorem Reſiduo Quadrati vel Cubi poſt ſubductum Aq vel Ac. Quo caſu, Quotus inventus Unitate (quoties eſt opus) mulctandus eſt. Ex. gr. In Analyſi Cubi prædicti 185193, 75)601(8. Quia vero 8 pro E ſumptò, Summa Membrorum 3AqE + 3AEq + Ec erit major Reſiduo

ſiduo 60193, idcirco ſumendus erat 8 — 1 h. e. 7 pro E. At ſunt qui pro 3Aq) 3AqE utuntur 3Aq + 3A) 3AqE + 3AEq, quippe Diviſio hoc modo inſtituta rarius exhibet Quotum vero E majorem.

XI. Evolutio Radicis Multinomiæ ita ſe habet ad Evolutionem Radicis Binomiæ, ut Involutio illius ad Involutionem hujus: ſcilicet nihil aliud eſt quam Evolutio Radicis Binomiæ, quoties opus eſt, repetita. Ex. gr.

Analyſis Quadrati à Radice Multinomia.



Analyſis

Analysis Cubi à Radice Multinomia.

Ac Subducend. 1872376015803290 (57209
3 Aq) 3 AqE, &c. 9747) 2044601 (
Ac jam subductus 3 AqE 225 3 AEq 735 Ec 343 Subducend. 60193
= 60193
1872376015803290
= 1956248
883535880
Ac jam subductus 3 AqE 225 3 AEq 735 Ec 343
3 Aq) 3 AqE, &c. 9747) 20446,01 (
3 AqE 225 3 AEq 735 Ec 343
3 Aq) 3 AqE, &c. 9747) 20446,01 (
19494 684 8 Subducend. 1956248
= 1956248
883535880
3 AqE 3 AEq Ec
3 Aq) 3 AqE, &c. 9747) 20446,01 (
19494 684 8 Subducend. 1956248

tenus continuata uſque & uſque ducit propius ad Radicem quæſitam, nunquam penitus eruendam: Ex. gr.

Quadr. 3292,0000 &c. (57,37 &c.
Cub. 185294,000000 &c. (57,01 &c.

Ubi Radix Quadrati quæſita eſt major 57, ſed minor 58; itemque Radix Cubica quæſita eſt major 57, ſed minor 58.

XIII. Hujuſmodi Radix, cum Ratio ejus Numeris nullis exprimi queat, vocatur *Irrationalis*, itemque *Surda*; & ſic notatur $\sqrt{q}\,6$ ſeu $\sqrt[2]{6}$ ſeu omiſſo Dimenſionis ſymbolo $\sqrt{}\,6$, $\sqrt{c}\,4$ ſeu $\sqrt[3]{4}$ &c. h. e. Radix Quadrati 6, Radix Cubi 4 &c. Quare patet viciſſim, Quadratum Surdi $\sqrt{q}\,6$ eſſe 6, Cubum Surdi $\sqrt{c}\,4$ eſſe 4 &c. Et hæc eſt tanquam Geneſis & Analyſis Poteſtatum Surdarum. Plura de doctrina Surdorum vide in Capite ſequenti *de Reductione*.

XIV. Fractio quadratur vel cubatur, Quadrando vel Cubando utrumque & Numeratorem & Denominatorem; puta Quadratum à $\frac{2}{3}$ eſt $\frac{4}{9}$, à $\frac{b}{c}$ eſt $\frac{b^2}{c^2}$; Cubus à $\frac{2}{3}$ eſt $\frac{8}{27}$, à $\frac{b}{c}$ eſt $\frac{b^3}{c^3}$. Et vice verſa, Fractio Quadratica vel Cubica reſolvitur, reſolvendo utrumque & Numeratorem & Denominatorem; puta Radix Quadrati $\frac{4}{9}$ eſt $\frac{2}{3}$, Quadrati $\frac{b^2}{c^2}$ eſt $\frac{b}{c}$; Radix Cubi $\frac{8}{27}$ eſt $\frac{2}{3}$, Cubi $\frac{b^3}{c^3}$ eſt $\frac{b}{c}$. Sin Radix evolvi nequeat, tum Fractio fit Surda; puta Radix Quadrati $\frac{2}{5}$ eſt $\sqrt{\frac{2}{5}}$, Quadrati $\frac{2}{9}$ eſt $\sqrt{\frac{2}{9}}$ ſeu $\frac{\sqrt{2}}{3}$. Radix Cubi $\frac{2}{5}$ eſt $\sqrt{c}\,\frac{8}{5}$, Cubi $\frac{8}{9}$ eſt $\sqrt{c}\,\frac{8}{9}$ ſeu $\frac{2}{\sqrt{c}\,9}$.

XV. Ea

XV. Ea omnia, quæ jam dicta ſunt de Analyſi Quadrati & Cubi, per Analogiam accommodanda ſunt Analyſi Poteſtatis alicujus ſuperioris, habita nimirum ratione Membrorum Poteſtatem ſuperiorem reſolvendam componentium, juxta Tabulam poſteriorem Poteſtatum in Notis ſequentibus appoſitam.

XVI. Denique tam Involutio quam Evolutio ſuum habet Symbolum, quo brevitatis gratia inter operandum denotari ſolet. Nempe ☞ eſt ſignum Involutionis, ω ſignum Evolutionis.

NOTÆ.

Ad §. I. Poteſtas eſt id quod *poteſt* (h. e. valet efficere) Quantitas aliqua ſive per ſe ſive per aliam multiplicata. Hinc Factos quoſvis appellare licet Poteſtates. Sed uſu-venit, ut Facti tantum à Quantitate aliquoties per ſe multiplicata, eo nomine vulgo deſignarentur, ſive id primo factum fuerit meræ diſtinctionis gratia, ſeu quaſi κατ' ἐξοχὴν h. e. ob præſtantiorem Factorum hujuſmodi uſum in Arithmetica: unde fieri videtur, ut quæ vulgo Poteſtates vocantur, nonnullis etiam *Dignitates* nuncupentur.

NB. Geneſis Poteſtatum & Involutio unam eandemque denotant Operationem, ſed duplici reſpectu. Nempe appellatio prior reſpicit Poteſtates à Radice procreatas: poſterior viciſſim, Radicem quæ procreat Poteſtates. Et par eſt diſcrimen inter Analyſin Poteſtatum & Evolutionem: ſcilicet eadem Operatio dicitur Analyſis Poteſtatum, reſpectu Poteſtatum quas in Radices ſuas reſolvit; itemque Evolutio, reſpectu Radicum quas ex Poteſtatibus reſolutis evolvit ſive eruit.

Et quemadmodum ipſa Operatio varias ſortitur Denominationes, ita & Poteſtates ſingulæ apud varios Scriptores variis deſignantur cum Nominibus tum Characteribus, juxta Tabulam ſequentem.

Tabula variorum Nominum nec exprimuntur apud

Poteſtas	Nomina		
	apud Arabes eorumque ſequaces	*apud Vietam & Oughtredum*	*apud Algebriſtas Italicos*
1na	Radix	Radix	Coſa
2na	Quadratum	Quadratum	Zenzus
3na	Cubus	Cubus	Cubus
4na	Quadrato-quadratum	Quadrato-quadratum	Zenzo-zenzus
5na	Surſolidum primum	Quadrato-cubus	Zenzo-cubus
6na	Quadrato-cubus	Cubo-cubus	&c.
7ma	Surſolidum ſecundum	Quadrato-qto-cubus	
8va	Qto-qto-quadratum	Quadrato-cubo-cubus	
9na	Cubo-cubus	Cubo-cubo-cubus	
10na	Qtum Surſolidi primi	&c. uti in Characteribus *Oughtredianis*.	
11na	Surſolidum tertium		
12na	Quadto-quadto-cubus		
13na	Surſolidum quartum		
14na	Qtum Surſolidi 2di		
15na	Cubus Surſolidi primi		
16na	Qto-qto-qto-quadtum &c.		

NB. Quadrato-cubus ſignificare poteſt Quadrati Cubum, ſeu Cubi Quadratum, adeoque Poteſtatem Sextanam (quæ ex Cubo in ſeipſum ducto emergit, vel ex Quadrato Cubice multiplicato, h. e. in ſeipſum bis ducto;) atque in hac ſignificatione appellationes in prima Serie poſitas intelligendæ ſunt, quibus congruunt prima & ſecunda Characterum Series. At *Vieta* & qui illum ſequuntur, per Quadrato-cubum intelligunt Poteſtatem Quintanam, quæ ex Quadrato in Cubum ducto emergat, adeoque Veterum Surſolidos primos hi Quadrato-cubos vocant, & eadem Analogia reliquarum Poteſtatum nomina formant, adeoque Surſolidorum appellationem omittunt; cui etiam nomenclaturæ conveniunt ipſorum Characteres

non Symbolorum, quibus Poteſtates varios Algebriſtas.

Characteres

apud Veteres Algebriſtas		*apud Oughtredum &c.*	*apud Harriotum &c.*	*apud Carteſium &c.*
♃	R	A	a	a
♃♃	Q	Aq	aa	a^2
♀	C	Ac	aaa	a^3
♃♃♃	QQ	Aqq	aaaa	a^4
∫♄	S	Aqc	aaaaa	a^5
♃♀	QC	Acc	aaaaaa	a^6
B∫♄	bS	Aqqc	aaaaaaa	a^7
♃♃♃♃	QQQ	Aqcc	&c.	a^8
♀♀	CC	Accc		a^9
♃∫♄	QS	Aqqcc		a^{10}
C∫♄	cS	Aqccc		a^{11}
♃♃♀	QQC	Acccc		a^{12}
D∫♄	dS	Aqqccc		a^{13}
♃B∫♄	QbS	Aqcccc		a^{14}
♀∫♄	CS	Acccccc		a^{15}
♃♃♃♃♃	QQQQ	Aqqcccc		a^{16}
&c.	&c.	&c.		&c.

racteres in Serie tertia. Characteres *Harrioti*, itemque *Carteſii* utrivis nomenclaturæ æque conveniunt, cum ſolummodo Poteſtatum ordinem ſeu numerum Dimenſionum innuant: At *Carteſius* interim & qui illum imitantur, veterum potius nomenclaturam reſumunt.

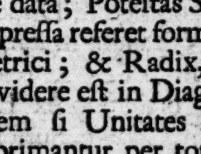
Characteres ♃, ♃, ♀, ∫♄, orti ſunt ex Literis V, Z, C, S; & innuunt Rem, Zenſum, Cubum, Surſolidum. Nam Itali pro Radice dicant *Rem* (& quia Res Italice dicitur *Coſa*; inde numeri Figurati, *Coſſici* vocantur; & Regula Algebræ, Regula *Coſæ*, &c.) item pro Quadrato dicunt *Zenzum* ſeu Cenſum. Vide plura in Doctiſſ. *Walliſii* Matheſi Univerſali Cap. XI.

Ad

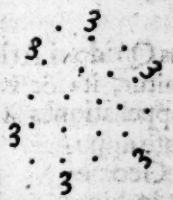
Ad §. II. Poteſtas dicitur eſſe totidem *Dimenſionum*, quot vicibus involvit Radicem ſuum; quia vice verſa, idcirco Radix toties ipſam *dimetitur*. Puta A bis dimetitur h. e. poteſt bis applicari ad A^2 ſeu $A \times A$: Nempe A ſemel applicatum ad $A \times A$ dat A, viz. $A) A \times A (A$, ad quod rurſus applicari poteſt A, viz. $A) A$. Similiter 3 bis dimetitur h. e. poteſt bis applicari ad 9 ſeu 3×3: Nempe 3 ſemel applicatum ad 3×3 dat 3, viz. $3) 9$ ſeu $3 \times 3 (3$, ad quod rurſus poteſt applicari 3, viz. $3) 3$.

Ad §. III. Quælibet nova Dimenſio conſtituit novam Speciem Dimenſionum ſive Poteſtatum: Nempe binæ Dimenſiones conſtituunt Speciem ſecundam, tres tertiam; &c. Hinc A^2 quæ eſt binarum Dimenſionum dicitur Poteſtas Secundana, h. e. ſecundæ Speciei ſive ſecundæ Dimenſionis; item A^3 quæ eſt trium Dimenſionum dicitur Poteſtas Tertiana h. e. tertiæ Speciei ſive tertiæ Dimenſionis, &c. ſed quemadmodum binæ Dimenſiones conſtituunt Poteſtatum Speciem ſecundam, tres tertiam, &c; ſic quidni Dimenſio una conſtitueret Poteſtatum Speciem primam, ac proinde quidni Radix vulgo dicta appellaretur Poteſtas Primana? ſed de hac re vide plura in Cap. *de Proportione*.

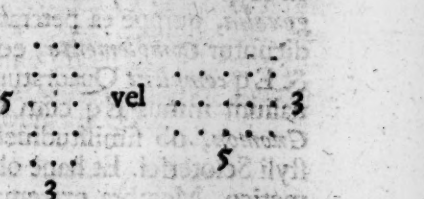
Ad §. IV. Ex Poteſtatibus Arithmeticis tres primæ vere reſpondent tribus Geometricis Quantitatibus, quarum nomina mutuantur. Nempe ſi juxta ſimpliciſſimum Multiplicandi modum Unitates Poteſtatis alicujus Secundanæ exprimantur per totidem Puncta ita Seriatim diſpoſita, ut unaquæque Series ſive ſecundum Longitudinem ſive ſecundum Latitudinem Diagrammatis punctati ſumpta, tot contineat Puncta, quot ſunt Unitates in Radice data; Poteſtas Secundana hoc modo expreſſa referet formam Quadrati Geometrici; & Radix, formam Lateris: uti videre eſt in Diagrammate appoſito. Item ſi Unitates Poteſtatis Tertianæ exprimantur per totidem Puncta ita ſeriatim diſpoſita, ut unaquæque Series ſive ſecundum Longitudinem ſive ſecundum Latitudinem ſeu denique ſecundum Profunditatem Diagrammatis punctati ſumpta, tot contineat Puncta, quot ſunt Unitates in Radice; Poteſtas Tertiana ſic expreſſa



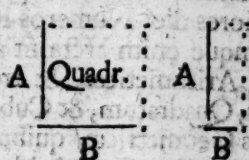
preſſa referet formam Cubi Geometrici; & Radix, formam Lateris; uti quadantenus videre eſt in Diagrammate appoſito.



Et heic videtur commode adnectendum, quod ſi Unitates Producti ex Numero quovis per alium quemvis multiplicato pari ratione exprimantur per totidem Puncta ita ſeriatim diſpoſita, ut unaquæque Series ſecundum Longitudinem Diagrammatis ſumpta tot contineat Puncta, quot ſunt Unitates Numeri unius dati; ſumpta autem ſecundum Latitudinem, tot contineat Puncta, quot ſunt Unitates Numeri alterius dati: Productus ſic expreſſus referet formam Rectanguli Geometrici; & Factores dati, duo Latera, h. e. unus Factor Longitudinem, alter Latitudinem: unde & Productus aliquis ex duobus Factoribus diverſis appellatur *Rectangulum*. Et quia idem futurus eſt Punctorum numerus, ſive Diagramma jacens ſive erectum ſit; hinc perinde eſt, uter è duobus datis Factoribus alterum multiplicet.



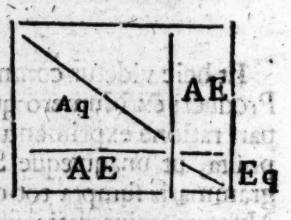
Porro quia tam Rectangulum quam Quadratum Geometricum fieri ſeu deſcribi concipitur ductu unius Lateris dati in alterum, h. e. motu unius Lateris dati (puta A) per ſingulas partes alterius (puta B;) hinc in Arithmetica Factor *ductus in* Factorem idem valet, ac Factor per Factorem multiplicatus. Certe Latus unum dum per ſingulas Partes alterius movetur, *toties ponitur*, quot alterum continet Partes, h. e. revera multiplicatur per Partes alterius; ac proinde [*ducere in*] eſt pluſquam locutio mere Metaphorica pro [*multiplicare per*].



Rurſus,

Rursus, quia Quadratum & Rectangulum Geometricum vocantur *Figuræ Planæ*; Cubus Geometricus, *Figura Solida*: hinc & Quadratum & Rectangulum Arithmeticum vocantur *Numeri Plani*; Cubus Arithmeticus, *Numerus Solidus*.

Præterea veluti ipsius Quadrati Arithmetici nomen à Quadrato Geometrico sumitur, ita & varia illius Membra proprias sibi sortiuntur appellationes à variis hujus Membris. Nempe in Diagrammate appositio vides Quadratum Geometricum ex Linea AE, in binas partes A & E secta & in se ducta, componi ex Quadrato partis majoris A, itemque minoris E; atque etiam ex binis Rectangulis partis majoris A in partem minorem E ductæ: h. e.



ex Aq + Eq + 2AE. Ex quibus Aq & Eq dicuntur *Diagonalia*, quippe ea pertranfit Linea Diagonalis: item 2AE dicuntur *Complementa*, eo quod una cum Diagonalibus Aq & Eq *complent* Quadratum ex Linea AE. Denique Diagonalium minus Eq cum Complementis 2AE vocari solet *Gnomon*, ob similitudinem quam referunt Gnomonis sive styli Scioterici. Et hanc ob causam etiam in Quadrato Arithmetico, Membra extrema Aq & Eq dicuntur Potestates Diagonales; & 2AE, Complementa; & 2AE + Eq, Gnomon. Pari ratione Ac & Ec dicuntur Cubi Potestates Diagonales, Membra intermedia 3AqE & 3AEq, Complementa; denique 3AqE + 3AEq + Ec, Gnomon.

Sciendum autem est eadem Nomina attribui Membris Potestatum omnium superiorum, (itemque ipsas Potestates superiores dici Numeros Figuratos) nonnisi per Analogiam. Utcunque enim arcta sit affinitas inter tres inferiores Potestates Arithmeticas, & tres Quantitates Geometricas, viz. Latus, Quadratum, & Cubum: nullæ deinde supersunt Quantitates Geometricæ, quibus revera respondeant quæ deinceps sequuntur Potestates Arithmeticæ. Cùm enim Dimensio Geometrica denotet (aut saltem postulet) *Localem Extensionem*, Dimensio autem Arithmetica *Radicis Involutionem*; illa potest esse tantum *triplex*, quippe non datur Localis Extensio nisi in Longitudinem, Latitudinem, & Profunditatem; hæc autem

autem *infinite multiplex*, quippe Radix potest in infinitum involvi sive in se duci. Quocirca Potestates quartana, quintana &c. non aliam ob causam designari solent per voces ex nominibus Geometricis Quadrati & Cubi conflatas, quam quod Potestates illæ ita designatæ considerari possunt tanquam aliquo modo procreatæ ex Quadrato aut Cubo Arithmetico, aut ex utroque. Ex. gr. Potestas (81) quæ dicitur Quartana, quia quater involvit Radicem suam (3. nam $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$); dicitur etiam Quadrato-Quadratum seu Biquadratum, quia fieri potest ex Quadrato Quadrati, atque adeo constat quasi ex binis Quadratis (nam $3q \times 3q$ h. e. $9 \times 9 = 81$).

Ad §. V, &c. Digitus omnis præter Unitatem concipi potest tanquam Radix Binomia, quatenus potest dividi in binas partes, adeoque exprimi binis Notis; puta $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, &c. Quare & Potestates à Digitis (excepta Unitate) constant ex iisdem Membris, ex quibus conflantur Potestates Numerorum reliquorum; puta 9, h. e. Quadratum à 3 seu $2 + 1$, constat ex $2q$ + bis $2 \times 1 + 1q$ h. e. ex $4 + 4 + 1$. Veruntamen quia Valor Digiti cujusque solet exprimi Nota unica seu *singulari*, hinc Potestates à Digitis dicuntur Potestates à Radicibus *singularibus*, quarum inferiores aliquot exhiberi solent in Tabula apposita.

Tabula Prior Potestatum à Radice singulari.

L A	[2] Aq	[3] Ac	[4] Aqq	[5] Aqc	[6] Acc	[7] Aqqc	[8] Aqcc
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256
3	9	27	81	243	729	2187	6561
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721

NB. Patet, quod, ſi quæratur Digiti Poteſtas quævis infra nonanam, aut vice verſa, Radix Poteſtatis alicujus (infra nonanam) à Digito, utraque ex Tabula ſtatim depromi queat. Sed præterea notandum eſt, eandem Tabulam inſervire Geneſi & Analyſi Poteſtatum à Numeris quibuſvis, quatenus utrobique Locus Figurarum negligitur, hoc eſt, Figura cujuſcunque Loci habetur tanquam Digitus. Sic in quadrando vel cubando 57209, quamvis 5 ſit in Loco Myriadum, h. e. ſit 50000, tamen quia inter operandum (juxta §. VI.) 5 habetur tanquam Digitus, ſi ſumatur ex Tabula Quadratum vel Cubus à 5, & ſtatuatur juxta §. VI; idem inde eveniet, ac ſi quadretur vel cubetur 50000. Et viciſſim in Analyſi Quadrati vel Cubi à 57209, (uti videre eſt in §. XI.) quamvis Quadratum 25 ſit reſpectu Loci ſui 2500000000, & Cubus 125 ſit eodem reſpectu, nempe Loci ſui, 125000000000000, tamen quia inter operandum Locus utrobique negligitur, ſi (ſumatur ex Tabula Radix Quadrati 25 vel Cubi 125, h. e. ſi) 5 ſtatuatur poſt ſemilunulam tanquam Nota Radicis quæſita; idem inde eveniet tandem, ac ſi ſtatueretur ibidem (Radix Quadrati 2500000000 vel Cubi 125000000000000 h. e.) 50000.

Verum multo præſtantior eſt uſus Tabulæ, quæ exhibet Poteſtates à Radice Binomia Specioſa, quatenus totidem exhibet Theoremata de Geneſi & Analyſi Poteſtatum homogenearum à Radice Numeroſa, uti poſtea docebitur.

Tabula Poſterior Poteſtatum à Radice Binomia.

	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	
A	Aq	Ac	Aqq	Aqc	Acc	
E	2AE	3AqE	4AcE	5AqqE	6AqcE	
	Eq	3AEq	6AqEq	10AcEq	15AqqEq	&c.
		Ec	4AEc	10AqEc	20AcEc	
			Eqq	5AEqq	15AqEqq	
				Eqc	6AEqc	
					Ecc	

Vel

Vel

			A^4	A^5	A^6	
	A^2	A^3	$4A^3E$	$5A^4E$	$6A^5E$	
A	$2AE$	$3A^2E$	$6A^2E^2$	$10A^3E^2$	$15A^4E^2$	
E	E^2	$3AE^2$	$4AE^3$	$10A^2E^3$	$20A^3E^3$	&c.
		E^3	E^4	$5AE^4$	$15A^2E^4$	
				E^5	$6AE^5$	
					E^6	

NB. 1. In forma priori Tabulæ præmiſſæ, Numeri Uncis incluſi denotant varias Dimenſiones ſive Ordinem Poteſtatum; puta [2] denotat Poteſtatem Secundanam ſeu Quadratum, [3] Poteſtatem Tertianam ſeu Cubum, [4] Poteſtatem Quartanam ſeu Biquadratum.

2. Patet ex Tabula, Biquadratum à Radice Binomia conſtare ex Biquadrato Notæ majoris, itemque minoris; atque etiam ex Productis, tam Cubi Notæ majoris in minorem quam Cubi Notæ minoris in majorem ducti, quadruplicatis; ac denique ex Producto Quadrati Notæ majoris in Quadratum minoris ducti ſexies ſumpto. Et hoc eſt Theorema de Geneſi Biquadrati; unde deduci poteſt aliud Theorema de Analyſi ejuſdem hunc ad modum: Biquadratum reſolvitur, primo tollendo Biquadratum Notæ majoris Aqq, ſumpto interim Latere ejus A pro Nota majore Radicis quæſitæ; & deinde per Cubum Notæ majoris quater ſumptum $4Ac$ dividendo Membrum proximum $4AcE$. Nam $4Ac)4AcE(E$, & E ductum rurſus in Diviſorem facit $4AcE$, item $Eq \times 6Aq$ facit $6AqEq$, & $Ec \times 4A$ facit $4AEc$, & $E \times E \times E \times E$ facit Eqq. Subductis autem $4AcE + 6AqEq + 4AEc + Eqq$ ex Reſiduo Biquadrati poſt ſubductum Aqq, nihil reſtat: idcirco Radix quæſita eſt $A + E$. Et ſimiliter Poteſtates reliquæ exhibent Theoremata in verbis pariter enuncianda, mutatis mutandis.

3. Conſtat ex Tabula, Biquadratum conflari ex quinque Membris diverſis ſive heterogeneis, Bicubum ex ſeptem, &c. adeoque (juxta §. VI.) Biquadratum à Radice Binomia Nu-

merosa occupare quinque ad minimum Locos, Bicubum ad minimum septem, &c. ac proinde in Analysi Biquadrati Punctationem statuendam esse sub qualibet Figura quarta, in Analysi Bicubi sub qualibet sexta, &c.

4. Constat Membrum quodlibet Potestatis cujusque componi ex duobus Membris Potestatis præcedentis utrinque proximis, nempe ex Potestate Notæ majoris A in Membro superne proximo, & ex Potestate Notæ minoris E in Membro inferne proximo. Numerus etiam affigendus ex utroque Numero iisdem Membris affixo aggregatur. Puta in Potestate [4] Membrum 6 A q E q componitur ex duobus Membris Potestatis [3] utrinque proximis, nempe ex A q in Membro superne proximo, & E q in Membro inferne proximo, & ex Numeris 3 & 3 utrique Membro affixis. Quare continuari facile poterit hæc Tabula (valde utilis & mysteriis plena) ulterius pro lubitu. Certe cum Potestatis cujusvis Membra intermedia inter duas Potestates Diagonales ea ratione conficiantur, ut Potestates ab A continue decrescant, ab E continue crescant, una Dimensione; atque adeo in singulis Membris Dimensiones Potestatis ab A & Potestatis ab E junctim exæquent Dimensiones Potestatis Binomiæ datæ; hinc admodum facilis esset Genesis Potestatis cujusvis superioris etiam absque ope Tabellæ præmissæ, modò certa excogitaretur Regula de Inventione Numerorum affigendorum, etiam absque ope Tabellæ. Proponatur v. g. Genesis Potestatis 10ma. Primo duæ Potestates Diagonales erunt a^{10} & e^{10}, Potestates intermediæ ab *a* erunt a^9, a^8, a^7, &c. item ab *e* erunt e, e^2, e^3, &c. adeoque junctim $a^9 e$, $a^8 e^2$, $a^7 e^3$, &c.

5. Eadem Tabula ostendit Potestates Radicis etiam *Residualis* (h. e. quæ non denotat Summam, sed Differentiam Notarum suarum, seu *Residuum* Notæ majoris post subductam minorem;) puta A — E, modo Signa + & — Membris alternis cujuslibet Potestatis affigantur; ut

$$\begin{array}{r|l|l|l} & Aq & Ac & \\ A & +2AE & -3AqE & \&c. \\ -E & Eq & 3AEq & \\ & & -Ec & \end{array}$$

Similiter

Similiter oſtendit eadem Tabula Poteſtates Radicis *Negativæ*, viz. $-A-E$; modo $\pm$ affigatur omnibus Membris earum Poteſtatum, quæ ſunt Dimenſionum { parium. / imparium.

Ex. gr.

	Aq	$-Ac$
$-A$	$2AE$	$-3AqE$
$-E$	Eq	$-3AEq$
		$-Ec$

&c.

6. Porro videtur haud omittendum, Numeros Membris Poteſtatis alicujus affixos (dempta Unitate, h. e. Numero unius è Poteſtatibus extremis omiſſo) inſervire indicandis *Combinationibus* Rerum numero æqualium Dimenſionibus Poteſtatis ejuſdem: Ex. gr. Numeri affixi Membris Poteſtatis Tertianæ viz. $3+3+1=7$ indicant Res quaſvis numero tres poſſe ſeptem variis modis combinari: nempe 3 Unitates, 3 Biniones, & 1 Ternio conficiunt Combinationes 7. Puta in a, b, c ſunt a, b, c, & ab, bc, ac, & abc. De Rerum *Variationibus* ſive *Tranſpoſitionibus* v. Not. ad C. XI.

7. Ex his omnibus abunde conſtat, quantum Arithmetica Specioſa præſtat Numeroſæ: Cùm nulla ſit Operatio Specioſa, quæ non conſervat Species datas, Specimen exhibens totius Operationis, atque adeo Regulam pro Caſibus omnibus ſimilibus. Dum in Praxi Numeroſa, Numeri à novo quem proferunt, ita abſorbentur, ut penitus diſpareant, nec ulla ſui veſtigia relinquant, quæ ducant in ſolutionem quæſtionum conſimilium.

Ad §. VI. Geneſis Quadrati &c. Theorematica nihil aliud eſt, quam Multiplicatio communis, neglectis Reg. Gen. E. g.

Forma Theorematica.		Forma communis, &c.	
57		57	
		57	
Aq 25		49	Aq
2AE 70		35 } 35 }	2AE
Eq 49		25	Eq
3249		3249	

Unde

Unde clare constat, Rationem ita subordinandi Membra Potestatis alicujus simul addenda, ut Membrum quodque inferius stet uno Loco ulterius ad dextram, quam Membrum proxime superius, non aliunde petendam esse, quam à Praxi Vulgari Numerosa; non à Membris Potestatis Speciosæ homogeneæ. Quamvis enim Quadratum à 3 seu 2 + 1, constat ex 2q + bis 2 x 1 + 1, hoc est, ex 4 + 4 + 1, tamen Membra illa omnia in Additione sunt eodem Loco statuenda; viz.

$$\left.\begin{matrix}4\\4\\1\\\hline 9\end{matrix}\right\} \text{ non } \left\{\begin{matrix}4\\4\\1\\\hline 441\end{matrix}\right\}$$

Nempe quia in 2 + 1 tam 2 quam 1 sunt Unitates.

NB. Patet cùm Involutionem tum Evolutionem expediri posse ope Laminarum *Neiperianarum*, quotiescunque scilicet Multiplicatio vel Divisio instituenda est. At Methodus longe expeditissima absolvendi Genesin vel Analysin Potestatum fit ope Logarithmorum, de qua in Doctrina Logarithmorum ad calcem Libri appositа.

CAP.

CAP. X.

De Reductione.

I. *Reductio* convertit Quantitatem unius generis vel Denominationis in Quantitatem alterius *æquivalentem*; eſtque multiplex:

Prima erit, quæ convertit *Integrum* Denominationis *extrinſecæ majoris* in *Integrum* æquivalentem *minoris*, aut viciſſim *minoris* in æquivalentem *majoris*. In priori Caſu dicitur Reductio *Deſcendens*, in poſteriori *Aſcendens*. Illa fit *multiplicando* Numerum Reducendum per *totidem Unitates* Denominationis minoris, quot æquivalent *Unitati* majoris; hæc contra, *dividendo*. Ratio Regulæ conſtabit ex ipſa Praxi. Ex. gr. Proponantur 10 Solidi in Denarios convertendi: Quia $1^s = 12^d$, patet $10^s = (\text{decies } 12^d$ h. e. $10 \times 12 =) 120^d$. Viciſſim proponantur 120^d convertendi in Solidos: Quia $12^d = 1^s$, patet, quoties 12^d continentur in 120^d, toties contineri 1^s; adeoque $12) 120^d (10^s$.

II. Reductio Secunda erit *Integri* in *Fractum Vulgarem* æquivalentem, quæ fit ſtatuendo Unitatem pro Denominatore, hoc eſt, ſpectando Rem Integram tanquam ſuiipſius Partem Unitariam, ſive Anglice an Oneth. Nam Denominator cujuſque Fractionis oſtendit, in quot Partes Res Integra (de qua ſermo eſt) dividitur, aut ſaltem dividi concipitur. Quare in omni Fractione cujus Denominator eſt Unitas, Res Integra ſpectanda eſt quaſi diviſa in Partem Unitariam; adeoque cum Pars illa Unitaria nihil aliud ſit quàm ipſa Res Integra, patet Partem Unitariam ſemel, bis, terve, &c. poſitam nihilo differre ab ipſa Re Integra ſemel, bis,

bis, terve, &c. posita: Hoc est, $1 = \frac{1}{1}$, $2 = \frac{2}{1}$, $3 = \frac{3}{1}$, $40 = \frac{40}{1}$, $45 = \frac{45}{1}$, &c. Item $a = \frac{a}{1}$, $b = \frac{b}{1}$, $ab = \frac{ab}{1}$, &c.

NB. Hæc Reductio adhiberi solet, quoties Integer & Fractus sunt invicem multiplicandi. Puta $2 \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{1 \times 3} = \frac{4}{3}$. Item $b \times \frac{c}{d} = \frac{b \times c}{1 \times d} = \frac{bc}{d}$.

III. Reductio Tertia erit *Integri* in *Fractionem* æquivalentem cujuscunque *Denominationis datæ*, quæ fit ducendo Integrum in Denominatorem datum, & Productum statuendo pro Numeratore. Putà, si velis 2 vel 3 &c. converti in Fractum, cujus Denominator erit 4, fiet $2 = \frac{2 \times 4}{4}$ h. e. $\frac{8}{4}$, $3 = \frac{3 \times 4}{4}$ h. e. $\frac{12}{4}$. Sic $b = \frac{bd}{d}$, vel $\frac{bf}{f}$, &c. Ratio Praxeos est ista. In quotcunque Partes Res Integra dividitur, Partes illæ omnes ipsi Rei Integræ æquales sunt, ac proinde Partes omnes aliquoties positæ tantundem valent, ac ipsa Res Integra toties posita. Quare, cum toties poni intelligatur Res Integra, quot in se Unitates habet Numerus Integer; toties autem poni intelligantur Partes omnes, quoties Fractionis Denominator in Numeratore (sicuti ex utriusque officio patet) continetur; sequitur, Denominatorem datum toties continendum esse in Numeratore Fractionis quæsitæ, quot sunt Unitates Integri reducendi, h. e. juxta Regulam Vulgatam, Numeratorem constituendum esse ex Denominatore in Integrum ducto.

NB. 1. Hæc Reductio adhibenda est, quoties Integro addenda aut subducenda est Fractio.

2. Hujusmodi Fractiones omnes (§. II. & III. descriptæ, nempe) quæ aliquoties æquivalent Unitati

sive

ſive Integro, h. e. quorum Numeratores exæquant vel exuperant ſuos Denominatores, nuncupari ſolent Fractiones *Impropriæ*, quia Fractio *proprie* ſeu ex vi vocis denotat tantummodo Partes aliquot unius Integri, & idcirco Fractionis cujuſque *Propriæ* Numerator Denominatore ſuo minor eſt.

IV. Reductio (Integri cum Fractione, h. e. Numeri Mixti, ſeu, uti dici ſolet,) *Fractionis Mixtæ* in *Impropriam* nihil aliud eſt, quam Additio Integri (in Fractionem adhærenti homonymam converſi) ad Fractionem adhærentem. E. g. $2\frac{1}{4}=(\frac{8}{4}+\frac{1}{4}$ ſeu omiſſo, uti fieri ſolet, Denominatore Fractionis $\frac{8}{4}$, quippe qui inter Operandum nihil valet, $8+\frac{1}{4}=)\frac{9}{4}$. Item $C+\frac{SA}{R}=\frac{CR+SA}{R}$. Eſt autem ſciendum, Reductionem hanc adhibendam eſſe, quoties Fractio Mixta occurrit cum Fractione quavis alia per Operationem aliquam Primariam comparanda.

V. Quare viciſſim, Reductio *Fractionis Impropriæ* in *Integrum* vel *Fractionem Mixtam* fiet, dividendo Numeratorem per Denominatorem. V. g. Quia (juxta §. III.) $2=\frac{4\times2}{4}$ ſeu $\frac{8}{4}$, ergo $\frac{8}{4}=4)8$, ſeu $4)4\times2,=2$. Et quia (juxta §. IV.) $2\frac{1}{2}=\frac{4\times2+1}{4}$ ſeu $\frac{9}{4}$, ergo $\frac{9}{4}=4)9$, ſeu $4)4\times2+1,=2\frac{1}{4}$. Sic $\frac{de}{e}=e)de=d$; & $\frac{CR+SA}{R}=R)CR+SA=C+\frac{SA}{R}$. Obſervandum autem eſt, hanc Re-

ductionem conducere ad Fractionum Impropriarum æstimationem facilius ac clarius mente assequendam.

VI. Reductio Fractionis *datæ* ad Fractionem alteram alterius *cujusvis Denominationis* fit, ducendo Numeratorem Fractionis datæ in Denominatorem Fractionis quæsitæ, & Productum dividendo per Denominatorem Fractionis datæ. Nam Quotus exhibebit Numeratorem quæsitum. Puta, si velis convertere $\frac{2}{3}$ in Fractionem cujus Denominator erit 12; erit $\frac{2}{3} = \frac{3)2\times12}{12}$ seu $\frac{3)24}{12} = \frac{8}{12}$. Nam 3 : 2 :: 12 : 8. Idcirco & Ratio Praxeos petenda est à *Regula Proportionis* deinceps in Capite sequenti tradenda.

Hujus Reductionis usus præcipuus est, ut valor Fractionis datæ cognoscatur in Partibus ejusdem Rei Integræ *notioribus* sive *usitatis*. Hinc enim patet $\frac{2}{3}$ Solidi $= \frac{8}{12}$ s, sive 8 d. Item $\frac{2}{3}$ l $= \frac{3)40}{20}$ l $= \frac{13}{20} + \frac{1}{3}$ de $\frac{1}{20}$ l h. e. 13 s. 4 d. Nimirum *Solidus* & *Libra* haud communi usu in 3 Partes distribuuntur, sed ille in 12 Partes, quarum singulæ dicuntur *Denarii*; hæc in 20, quarum singulæ dicuntur *Solidi*. Et sic in aliis Denominationibus extrinsecis; putà, reducere $\frac{2}{3}$ *Pedis* ad Partes usitatas istius Mensuræ, non est nisi reducere $\frac{2}{3}$ ad Fractionem cujus Denominator est 12; quia *Pes* vulgo dividitur in 12 *Digitos*, adeoque $\frac{2}{3}$ ped. $= \frac{8}{12}$ ped. h. e. 8 dig.

VII. Reductio Fractionum duarum *heteronymarum* ad *homonymas* fit, multiplicando & Numeratorem & Denominatorem utriusque Fractionis datæ per alternum Denominatorem. Ex. gr. $\frac{b}{c}$ & $\frac{b}{f} = \frac{bf}{cf}$ & $\frac{bc}{fc}$.

Item

Item $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{3} = \left(\frac{3\times3}{4\times3}\right.$ & $\left.\frac{2\times4}{3\times4}\right.$ h. e.$\left.\right) \frac{9}{12}$ & $\frac{8}{12}$. Ubi patet $cf = fc$; item $4\times3 = 3\times4 = 12$, h. e. eundem communem Denominatorem utrobique exurgere. Patet etiam, Quantitates æquemultiplicatas ſive æqualiter auctas eandem ſervare Rationem, quam habuerunt ante Multiplicationem ſive Augmentationem; puta $b:c::bf:cf$, & $b:f::bc:fc$, hoc eſt, $\frac{b}{c} = \frac{bf}{cf}$, & $\frac{b}{f} = \frac{bc}{fc}$; item $3:4::(3\times3:4\times3::)9:12$, & $2:3::(2\times4:3\times4::)8:12$, h. e. $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, & $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$.

NB. 1. Eadem eſt Ratio reducendi Fractiones *quotvis* heteronymas ad homonymiam. Nempe Reductio Fractiones haud plures quam duas ſimul comparat, aut una vice tractat. Proponantur v. g. $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$. Primo $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{3} = \frac{3}{6}$ & $\frac{4}{6}$; & deinde $\frac{3}{4}$ & $\frac{3}{8} = \frac{18}{24}$ & $\frac{12}{24}$; item $\frac{3}{4}$ & $\frac{4}{6} = \frac{18}{24}$ & $\frac{16}{24}$. Ubi vides Fractiones $\frac{3}{4}$ & $\frac{3}{8}$ &c. in deſcribenda ejuſmodi Praxi bis repeti. Poteſt autem & ſolet Praxis (hoc eſt, Forma deſcribendi Praxin) nonnihil expediri, omiſſâ ſcilicet earundem Fractionum repetitione, hunc ad modum; videlicet, $\frac{1\times3}{2\times3}\left(\frac{3}{6}\right)^{\times4}_{\times4} = \frac{12}{24}$, item $\frac{2\times2}{3\times2}\left(\frac{4}{6}\right)^{\times4}_{\times4} = \frac{16}{24}$, item $\frac{3\times2}{4\times2}\left(\frac{6}{8}\right)^{\times3}_{\times3} = \frac{18}{24}$: Hoc eſt juxta Regulam vulgatam, ubi plures dantur Fractiones ad homonymiam reducendæ, continua Denominatorum in ſe invicem multiplicatio dabit communem Denominatorem, & Numerator cujuſque Fractionis datæ ductus in Denominatores reliquarum dabit novum Numeratorem loco ſuo ſubſtituendum. Sic $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} = \frac{adf, cbf, ebd}{bdf}$.

2. Fractiones heteronymæ ad homonymiam prius ſunt reducendæ, quam poſſunt invicem comparari per Additionem, Subductionem, aut Diviſionem: Ex. gr. $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{9}{12}+\frac{8}{12}=\frac{17}{12}$; & $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=\frac{1}{12}$. Ubi obiter obſervandum eſt, Reductionem ad homonymiam indicare, quænam è datis Fractionibus heteronymis ſit major, hoc eſt, majoris Valoris; putà $\frac{3}{4}(=\frac{21}{28})\sqsubset\frac{5}{7}(=\frac{20}{28})$ & $\frac{2}{1}(=\frac{10}{5})\sqsubset\frac{3}{2}$.

Quod ad Diviſionem attinet, quia in dividendis Fractionibus heteronymis ad homonymiam reductis, idem (ſeu ſaltem æquivalens) extabit Quotus, ſive Diviſio fuerit inſtituta per utroſque & Numeratores & Denominatores, ſive per ſolos Numeratores, viz. $\frac{12}{48})\frac{24}{48}(\frac{2}{1}=12)24(2$, item $\frac{b}{c})\frac{3b}{c}(\frac{3}{1}=b)3b(3$ hinc in reducendis ad homonymiam Fractionibus heteronymis mox tantummodo *dividendis*, negligi ſolet procreatio Denominatorum homonymorum, & procreari ſolent tantum novi Numeratores Denominatoribus homonymis congruentes, & per eos ſolos fit Diviſio juxta Regulam Vulgatam, viz. Diviſio Fractionum Vulgarium fit multiplicando Numeratores Fractionum datarum per alternos Denominatores; putà $\frac{2}{8})\frac{3}{6}(\frac{24}{12}$, nempe quia $\frac{2}{8})\frac{3}{6}=\frac{12}{48})\frac{24}{48}=12)24$ ſeu $\frac{24}{12}$. Nam, uti patet ex §. III. Cap. VII. Fractio non eſt niſi Diviſionis *imperfectæ* indicium; vel juxta §. II. Cap. III. tam ÷ quam :). eſt ſignum Diviſionis. Unde conſtat etiam, Diviſionem Vulgatam non tam dividere Fractiones datas, quam exhibere Numeratores dividendos: Putà $\frac{24}{12}$, qui vulgo habentur Quotus ortus ex $\frac{2}{8})\frac{3}{6}$, ſunt revera tantummodo Fractionum $\frac{2}{8}$ & $\frac{3}{6}$ ad homonymiam reductarum Numeratores adhuc dividendi, nempe $\frac{24}{12}$ ſeu $12)24=2$. Sic vulgo

go $\frac{b}{c})\frac{d}{f}(\frac{dc}{bf}$: nempe $\frac{b}{c})\frac{d}{f}=\frac{bf}{cf})\frac{dc}{fc}=bf)dc$ ſeu $\frac{dc}{bf}$.

3. Reductio ad homonymiam edocet inveſtigationem duorum Integrorum, inter quos eadem erit Ratio, ac inter Fractiones duas propoſitas. Ex. gr. Quæruntur duo Integri, inter quos eadem erit Ratio, ac inter $\frac{3}{5}$ & $\frac{1}{8}$: Erunt 24 & 25. Nam $\frac{3}{5}:\frac{1}{8}::\frac{24}{40}:\frac{25}{40}::24:25$. Sic $\frac{b}{c}:\frac{d}{f}::\frac{bf}{cf}:\frac{dc}{fc}::bf:dc$. Quare Operatio hæc erit utilis amovendis Fractionibus, quæ in exequendis *Proportionis Regulis* exurgent atque etiam in *Æquationibus*.

VIII. Quia (juxta §. III. $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$, & $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$, &c. h. e. quia) Fractio quævis Terminis innumeris ſimiliter ſeſe ad invicem habentibus exprimi poteſt, & Operatio quælibet facillime abſolvitur in Terminis minimis; idcirco præſtat ante Operationem aliquam Fractionum inceptam, Fractiones datas deprimere ad *Terminos minimos*. Hoc autem fit ope *maximæ Menſuræ communis*, quæ invenitur continue dividendo majorem Terminum Fractionis cujuſvis per minorem, & Diviſorem per Reliquum. Nam Diviſor ille, qui primus Dividuum ſuum metitur abſque ullo Reliquo, erit Maxima Menſura communis: V. g. Fractionis $\frac{744}{899}$ maxima Menſura communis eſt 31. Nempe

744)899(1.	155)744(4.	124)155(1.	31)124(4
744	620	124	124
155	124	31	0

Sic $\frac{3Aq}{6A}$ reducitur ad $\frac{A}{2}$, dividendo utrumque Terminum

minum per 6 A. Et $\frac{4\,B^5}{6\,B^4}$ reducitur ad $\frac{2\,B}{3}$, dividendo per $6\,B^4$.

1. Quare ſi maxima duorum Terminorum communis Menſura ſit Unitas, jam ſunt minimi in eadem Ratione, viz. $\frac{24}{49}$.

2. Poteſt ſæpe Fractio ſatis deprimi per communem Menſuram *non-maximam*. Ubi notandum eſt, quod Numeri omnes *pares* deprimi queant per 2, omnes in 5 vel 0 exeuntes per 5, *Articuli* omnes, v. g. 10, 20, 300, &c. per æqualem Cifrarum ablationem: Putà,

$2)\frac{16}{64}\,|\,\frac{8}{32}\,|\,\frac{4}{16}\,|\,\frac{2}{8}\,|\,\frac{1}{4}$. $\quad 5)\frac{225}{475}\,|\,\frac{45}{95}\,|\,\frac{9}{19}$.

$5)\frac{50}{425}\,|\,\frac{10}{85}\,|\,\frac{2}{17}$. $\quad \frac{4}{5}\frac{|00}{00}=\frac{4}{5}$. $\quad \frac{7}{90}\frac{|00}{00}=\frac{7}{90}$.

IX. Reductio Fractionis *Compoſitæ* (quæ & *Fractio Fractionis* dicitur) in *ſimplicem* fit, continue multiplicando Numeratores in ſe invicem, itemque Denominatores: ut $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ v. g. Solidi $=\frac{6}{24}=$ (per §. VIII.) $\frac{1}{4}$ v. g. Solidi, hoc eſt, 3 Denar.

X. Reductio Fractionum *Vulgarium* in *Decimales* fit, dividendo Numeratorem Cifris (quot opus fuerit) auctum per Denominatorem, putà $\frac{1}{2}=_{\text{L}}5$. Nam $2)1_{\text{L}}0\,(_{\text{L}}5$ vel $2:1::10:5$. Item $\frac{2}{3}=_{\text{L}}666$ proxime. Nam $3)2_{\text{L}}000$ &c. ($_{\text{L}}666$ &c. Hoc eſt, Fractio Vulgaris $\frac{2}{3}$ converti nequit in Decimalem ſibi accurate æquivalentem; veruntamen adeo exigua eſt (aut ſaltem reddi poteſt per ulteriorem pro lubitu Diviſionem) Differentia, ut tuto contemni queat: Nempe in $\frac{2}{3}=_{\text{L}}666-$, non deſideratur $\frac{1}{1000}$ ad æquivalentiam accurate conſtituendam; adeoque in $\frac{2}{3}=_{\text{L}}667+$, exceſſus Fractionis Decimalis ſupra Vulgarem non erit $\frac{1}{1000}$. Et heic obiter vides, Reductionem Fractionis Vulgaris in Decimalem non eſſe niſi Reductionem

nem ejuſdem in Terminos datis majores, & quorum Denominator ſemper eſt Numerus Decimalis, ſive ex Decade in ſe aliquoties ducta ortus: Putà $\frac{1}{2} = \text{L}5$ h. e. $\frac{5}{10}$, $\frac{3}{4} = \text{L}75$ h. e. $\frac{75}{100}$. Quare viciſſim

XI. Reductio Fractionis *Decimalis* in *Vulgarem* fit deprimendo Decimalem (ſeu potius Vulgarem jam factam, ſubſcripto Denominatore) per Menſuram Communem. Putà $\text{L}5 = \frac{1}{2}$. Nam $5) \text{L}5$ ſeu $\frac{5}{10} (\frac{1}{2}$.

XII. Partes *Sexageſimæ* convertuntur in *Decimales*, ſi Cifris (quot opus eſt) auctæ dividantur per 60; putà $60) 45\text{L}00 (\text{L}75$. Nam $60 : 45 :: 100 : 75$. Quare & contra, Partes *Decimales* convertuntur in *Sexageſimas*, ſi multiplicentur per 60; putà $\text{L}75 \times 60 = 45\text{L}00$ ſeu 45. Nam $100 : 75 :: 60 : 45$.

XIII. Fractio *Vulgaris* reducitur in *Sexageſimalem*, ducto Numeratore in 60, & Facto per Denominatorem diviſo. Nam Quotus exhibebit Sexageſimalem quæſitam, quæ ſemper eſt Denominationis proxime inferioris Denominatione cognata Fractionis Vulgaris reducendæ. Ut $\frac{2}{3}$ Grad. $= (\frac{2 \times 60}{3} =) 40'$. Et $\frac{2}{3}$ Scrup. Primi $= 40''$. Et ſic porro. Quare $\frac{5}{24}$ Grad. $= 12', 30''$. Nempe primo $\frac{5}{24}$ Grad. $= (\frac{5 \times 60}{24} =) 12' \frac{12}{24}$: Et ſecundo $\frac{12}{24}$ Scrup. Primi $= (\frac{12 \times 60}{24} =) 30''$. Item $\frac{7}{11}$ Hor. $= 38', 10'', 54''', 32''''$ &c. Nempe primo $\frac{7}{11}$ Hor. $= (\frac{7 \times 60}{11} =) 38' \frac{2}{11}$: Secundo $\frac{2}{11}$ Scrup. Primi $= (\frac{2 \times 60}{11} =) 10'' \frac{10}{11}$: Tertio $\frac{10}{11}$ Scr. Secundi $= (\frac{10 \times 60}{11} =) 54''' \frac{6}{11}$: Quarto $\frac{6}{11}$ Scr. Tertii $= (\frac{6 \times 60}{11} =) 32'''' \frac{8}{11}$ &c.

&c. Nam ut in Decimalibus, ſic in Sexageſimalibus, nunc in infinitum, nunc ſaltem nimis in longum procedendum eſſet, priuſquam tota Fractio expoſita plane exhauriatur. Quo caſu, pro accurate Vero, ſaltem Vero proximum aſſumendum erit.

NB. Ratio Praxeos in §. XIII. (itemque X, XII.) omnino dependet à Regula Proportionis, uti inferius in Cap. ſeq. patebit. Nempe $\frac{2}{3}$ Grad. $= (\frac{2 \times 60}{11} =) 40'$, quia $3 : 2 :: 60 : 40$. Et ſic in cæteris.

XIV. Fractio *Sexageſimalis* reducitur in Vulgarem, ſi, Scrupulis omnibus propoſitis ad infimam Denominationem reductis, eorumque numero pro Numeratore ſumpto, congruus ſubſcribatur Denominator, nempe numerus ille qui oſtendit, quot iſtiuſmodi Scrupula in uno Integro continentur. Ut $12', 30'' = \frac{5}{24}$ Grad. ſive Hor. Nempe

12′	Item	1 Gr. ſive Hor.	
× 60		× 60	
720″		60′	Adeoq; $12', 30'' = \frac{750}{3600} = \frac{75}{360} = \frac{15}{72} = \frac{5}{24}$.
+ 30		× 60	
750″		3600″	

XV. Latera *Surda* (quemadmodum Fractiones Vulgares) reducuntur ad *minimos Terminos* ope maximæ Menſuræ communis, putà $\sqrt{12}$ & $\sqrt{147}$ reducuntur per $\sqrt{3}$ ad $\sqrt{4}$ & $\sqrt{49}$, h. e. ad 2 & 7. Item $\sqrt{c\,40}$ & $\sqrt{c\,1715}$ reducuntur per $\sqrt{c\,5}$ ad $\sqrt{c\,8}$ & $\sqrt{c\,343}$, h. e. 2 & 7. *Fractiones Surdæ* primo reducendæ ſunt ad homonymiam, & deinceps per communem Menſuram dividendæ. Putà $\sqrt{12} + \sqrt{\frac{27}{4}}$ h.e. $\sqrt{\frac{12}{1}} + \sqrt{\frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{48}{4} + \frac{27}{4}}$, quæ diviſæ per $\sqrt{\frac{3}{4}}$ reducuntur ad $\sqrt{16}$ & $\sqrt{9}$, h. e. 4 & 3.

NB. 1. La-

NB. 1. Latera Surda, quorum Numeri ad minimos Terminos reducti fiunt veri ſui generis Figurati, dicuntur *Commenſurabilia*, hoc eſt, cùm ſint ut Numerus ad Numerum, eorum Ratio Numeris effabilibus exprimi adeoque *commenſurari* poteſt: Ex. gr. $\sqrt{12}$ & $\sqrt{147}$, item $\sqrt{c40}$ & $\sqrt{c1715}$ ſunt Surda commenſurabilia, quippe ſunt ut 2 ad 7, qui dici ſolent eorum *Quoti Rationales*.

2. Surdorum Commenſurabilium *Additio* fit, ducendo Quotorum Rationalium Summam; *Subductio*, ducendo eorundem Differentiam; in communem Menſuram. Nam prout ipſa Surda Commenſ. fiunt ex Quotis Rationalibus in Menſuram communem ductis, ſic quidni Surdorum eorundem Summa aut Differentia fiet ex Summa aut Differentia Quotorum Rationalium in eandem Menſuram communem ducta. Ex. gr. Quia $\sqrt{3})\sqrt{147}(\sqrt{49}$ i. e. 7, & $\sqrt{3})\sqrt{12}(\sqrt{4}$ i. e. 2; idcirco $\sqrt{147}+\sqrt{12}=\sqrt{49}\times\sqrt{3}+\sqrt{4}\times\sqrt{3}=7\sqrt{3}+2\sqrt{3}=9\sqrt{3}$: item $\sqrt{147}-\sqrt{12}=\sqrt{49}\times\sqrt{3}-\sqrt{4}\times\sqrt{3}=7\sqrt{3}-2\sqrt{3}=5\sqrt{3}$. Similiter $\sqrt{12}+\sqrt{\frac{27}{4}}$ h. e. $\sqrt{\frac{48}{4}}+\sqrt{\frac{27}{4}}=\sqrt{16}\times\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{9}\times\sqrt{\frac{3}{4}}=4\sqrt{\frac{3}{4}}+3\sqrt{\frac{3}{4}}=7\sqrt{\frac{3}{4}}$. Et pari ratione $\sqrt{12}-\sqrt{\frac{27}{4}}=1\sqrt{\frac{3}{4}}$.

3. Surda *Incommenſurabilia* addúntur vel ſubtrahuntur ſolummodo ſignis + vel — interpoſitis: ut $\sqrt{7}+\sqrt{3}$, & $\sqrt{c10}-\sqrt{c5}$.

4. Surdorum homogeneorum *Multiplicatio* aut *Diviſio* eadem eſt ac Numerorum Rationalium, modo Factis aut Quotis præponatur Nota Radicalis data. Ut $\sqrt{7}\times\sqrt{3}=\sqrt{21}$; & $\sqrt{7})\sqrt{21}(\sqrt{3}$, vel $\sqrt{\frac{21}{7}}$ eſt $\sqrt{3}$. Item $\sqrt{A}\times\sqrt{E}=\sqrt{AE}$; & $\sqrt{A})\sqrt{AE}(\sqrt{E}$, vel $\sqrt{\frac{ae}{a}}$ eſt $\sqrt{e}$. Quare Quadratum à $\sqrt{3}$ erit $\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\sqrt{9}$ i. e. 3, hoc eſt, $Q:\sqrt{3}=3$; item

Q: $\sqrt{64}$ est 64. Item Cubus à $\sqrt{c3}$ est $\sqrt{c3} \times \sqrt{c3} \times \sqrt{c3} = \sqrt{c27}$ i. e. 3, h. e. C: $\sqrt{c3}$ est 3; item C: $\sqrt{c64}$ est 64, nempe juxta §. XIII. Cap. IX.

5. Latera heterogenea non multiplicantur vel dividuntur, nisi prius ad idem genus reducantur; multiplicando ipsas Potestates juxta alternos Indices, & Indices in se invicem. Ut $\sqrt[2]{10} \times \sqrt[3]{7} = \sqrt[6]{1000} \times \sqrt[6]{49}$. Item $\sqrt[2]{A} \times \sqrt[3]{Bq} = \sqrt[6]{Ac} \times \sqrt[6]{Bqq}$.

NB. Ratio Praxeos eadem est cum Ratione reducendi Fractiones ad homonymiam. Et si Indices dati fuerint altiorum Dimensionum, præstat eosdem (more Fractionum majorum) deprimere per maximam ipsorum (siqua fuerit) Mensuram communem. Sic $\sqrt[4]{10} \times \sqrt[6]{7}$ (nondum depressis Indicibus) $= \sqrt[24]{1000000} \times \sqrt[24]{2401}$. Sed $\sqrt[4]{10} \times \sqrt[6]{7}$ (depressis Indicibus $= \sqrt[2]{10} \times \sqrt[3]{7}$) $= \sqrt[6]{1000} \times \sqrt[6]{49}$ uti prius. Adeoque pro $\sqrt[24]{1000000}$ & $\sqrt[24]{2401}$ usurpari possunt $\sqrt[6]{1000}$ & $\sqrt[6]{49}$.

6. Pari ratione Quantitas Rationalis, si cum Surdo sit comparanda per Operationem aliquam Primariam, prius convertenda est in Surdum homogeneum, quod fit, multiplicando Quantitatem Rationalem juxta exigentiam Potestatis Surdæ datæ. Ut $9 = \sqrt{81}$, $5 = \sqrt{25}$. Quare $9\sqrt{3} = \sqrt{81} \times \sqrt{3} = \sqrt{243}$; & $5\sqrt{3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = \sqrt{75}$. Quare $\sqrt{147} + \sqrt{12} =$ (per §. X. 2.) $9\sqrt{3} = \sqrt{243}$: & $\sqrt{147} - \sqrt{12} =$ (per §. X. 2.) $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$. Item $7\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{49} \times \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{147}{4}}$; & $1\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{1} \times \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$. Quæ est Additionis & Subtractionis forma *Oughtrediana*. Similiter $\sqrt{c32} \times 2$ seu $2\sqrt{c32} = \sqrt{c32} \times \sqrt{c8} = \sqrt{c256}$. Item $2)\sqrt{c32} = \sqrt{c8})\sqrt{c32}$ vel $\sqrt{c\frac{32}{8}} = \sqrt{c4}$. Hinc Fractio Surda,

da, cujus Nota Radicalis unum tantum afficit terminum, redigi poteſt ad Fractionem, cujus Nota Radicalis utrumque afficiet terminum. Ut $\frac{\sqrt{2}}{5} = \sqrt{\frac{2}{25}}$, $\frac{5}{\sqrt{c4}} = \sqrt{c\frac{125}{4}}$. Sic $\frac{a}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{aa}{b}}$, $\frac{\sqrt[3]{ab}}{3d} = \sqrt[3]{\frac{ab}{27ddd}}$.

XVI. Denique ultimo loco non incommode adjungi poteſt *Reductio* (quæ dicitur) *Æquationum*, hoc eſt, Ratio immutandi duas Quantitates æquales, (nunc æqualiter augendo, nempe per æqualem Additionem vel Multiplicationem vel Involutionem, nunc æqualiter minuendo, nempe per æqualem Subductionem vel Diviſionem vel Evolutionem,) ſervata interim Æqualitate.

1. Reductio Æquationum fit per æqualem Additionem. Ex. gr. Si $4+2=9-3$ ſeu $b+c=d-f$, tum 3 ſeu f utrinque addito, $4+2+3=(9+3+3$ hoc eſt) 9 ſeu $b+c+f=(d-f+f$ hoc eſt) d.

2. Per æqualem Subductionem. Ex. gr. Si $4+2+3=9$ ſeu $b+c+f=d$, tum 4 ſeu b utrinque ſubducto, $4+2+3-4$ (h. e. $2+3$) $=9-4$ ſeu $b+c+f-b$ (h. e. $c+f$) $=d-b$.

NB. Utrobique, tam in æquali Additione quam in æquali Subductione, idem evenit, ac ſi facta eſſet tantum *Tranſpoſitio* Quantitatum, additarum vel ſubductarum, ſub Signis *contrariis*: Puta, ſi $4+2=9-3$, tum $4+2+3=9$, atq; adeo $2+3=9-4$; ſeu ſi $b+c=d-f$, tum $b+c+f=d$, atque adeo $c+f=d-b$.

3. Per æqualem Multiplicationem. Nempe ſi $2+3=5$, tum $2\times4+3\times4=5\times4$. Et ſi $\frac{6}{2}=3$, tum $\frac{6\times2}{2}$ ſeu $\frac{12}{2}$ hoc eſt $6=3\times2$. Item ſi $b+c=d$,

tum $bf + cf = df$. Et si $\frac{f}{g} = m$, tum $\frac{f}{g} \times n$ seu $\frac{fn}{g} = mn$.

Et huc spectat Reductio Æquationum, quoties Quantitas aliqua in Æquatione data est Fractio, per Reductionem Quantitatum reliquarum omnium ad homonymiam; nempe ut, omisso communi Denominatore, in solis Numeratoribus, h. e. in Integris Æquatio censeatur: Ex. gr. Si $9 = 4 + 2 + \frac{6}{2}$, tum $\frac{18}{2} = \frac{8 + 4 + 6}{2}$, seu $18 = 8 + 4 + 6$. Item, si $A - C = \frac{Aq + Bq}{D} + B + C$, tum $\frac{DA - DC}{D} = \frac{Aq + Bq + DB + DC}{D}$, seu $DA - DC = Aq + Bq + DB + DC$.

4. Per æqualem Divisionem. Nempe si $30 = 5 \times 6$, tum $\frac{30}{5} = \frac{5 \times 6}{5}$ h. e. 6. Item si $b = cd$, tum $\frac{b}{c} = \frac{cd}{c}$. Sic $BAq + BqA = Zc$, ac proinde $\frac{BAq + BqA}{B} = \frac{Zc}{B}$, hoc est, $Aq + BA = \frac{Zc}{B}$. Rursus $Aqq + BAc = ZqAq$, & idcirco $\frac{Aqq + BAc}{Aq} = \frac{ZqAq}{Aq}$, hoc est, $Aq + BA = Zq$.

5. Per æqualem Involutionem: Puta si $\sqrt{36} = 6$, tum $Q : \sqrt{36} = Q : 6$, h. e. 36. Et hoc artificio, quoties Quantitas Surda constituit Terminum aliquem Æquationis, Terminus ille reduci potest ad Quantitatem

tatem Rationalem. Ut $\sqrt{BA+B}=C$, vel per tranſpoſitionem $\sqrt{BA}=C-B$; ideoque $Q:\sqrt{BA}=Q:C-B$, hoc eſt, $BA=Cq-2CB+Bq$ vel $A=\frac{Cq-2CB+Bq}{B}$.

6. Per æqualem Evolutionem. Putà ſi $Aq=25$ ſeu 5×5, tum $A=5$. Si $Ec=343$ h. e. $7\times7\times7$, tum $E=7$.

NOTÆ.

Ad §. I. Cave ne credas, quia $1^s=12^d$, idcirco $1^s\times1^s=12^d\times12^d$; item quia $10^s=120^d$ & $2^s=24^d$, idcirco $10^s\times2^s=120^d\times24^d$. Nimirum patet ex antedictis (in Notis ad §. III. Cap. VI.) $1^s\times1^s$ & $12^d\times12^d$ revera eſſe $1^s\times1$, & $12^d\times12$, ac proinde $1^s\times12$ (non $1^s\times1$) $=12^d\times12$; item patet indidem $10^s\times2^s$ & $120^d\times24^d$ revera eſſe $10^s\times2$ & $120^d\times24$, ac proinde (non $10^s\times2$ ſed) $10^s\times24=120^d\times24$.

Ad §. II. & III. Patet Reductionem Integri in Fractionem ſimpliciter æquivalentem, referri poſſe ad Reductionem Integri in Fractionem æquivalentem Denominationis datæ, nempe cujus Denominator eſt Unitas. Item Reductionem Integri in Fractionem Denominationis datæ referri poſſe ad Reductionem Fractionum ad homonymiam. Nimirum hujuſmodi Reductione nunquam eſt opus, niſi ut Integro Fractio aliqua Denominationis datæ addatur aut ſubtrahatur. Putà, convertere 2 in Fractionem cujus Denominator eſt 4, idem eſt ac convertere 2 ſive $\frac{2}{1}$ ad homonymiam cum Fractione aliqua addenda aut ſubtrahenda cujus Denominator eſt 4.

Ad §. VI. Ad Reductionem in §. adſcripta ſupra traditam ſpectat Solutio hujuſmodi Quæſtionum, viz.

Quis Numerus eſt $\frac{2}{7}$ è 21? Hoc eſt, Quænam Fractio, cujus Denominator eſt 21, æquivalebit $\frac{2}{7}$? Quare $\frac{2}{7}=\frac{7)2\times21}{21}$ ſeu $\frac{7)42}{21}$ hoc eſt $\frac{6}{21}$. Nam $7:2::21:6$.

Quare

Quare & viciſſim, ſi quæratur, cujus Numeri numerus 6 continet $\frac{2}{7}$? Hoc eſt, Quænam Fractio, cujus Numerator eſt 6, æquivalebit $\frac{2}{7}$? Erit $\frac{2}{7} = \frac{6}{2)6\times7}$ ſeu $\frac{6}{2)42}$ h. e. $\frac{6}{21}$. Et pari ratione Fractio quævis data converti poteſt (ſi opus fuerit) ad Fractionem alteram etiam dati Numeratoris cujuſcunque. Quæ Reductio, cùm rarus aut nullus ſit ejus uſus, conſulto omiſſa eſt in textu.

Ad § VIII. Maximam Menſuram Communem eo artificio, quod in §. adſcripta traditur, reperiri demonſtrat *Euclides* Elem. 7. Prop. 2.

NB. In Fractionibus Speciosis, ſi omnino capaces ſint hujuſce Reductionis, hoc eſt, ſi Numerator & Denominator conſtat ex Speciebus homogeneis, eorum minimus erit Maxima Menſura Communis. Nempe $6A)\frac{3Aq}{6A}(\frac{\frac{1}{2}A}{1}$ hoc eſt $\frac{1}{2}A$ ſive $\frac{A}{2}$. Item $6Aqq)\frac{4Acc}{6Aqq}(\frac{\frac{2}{3}Aq}{1}$ h.e. $\frac{2}{3}Aq$ ſive $\frac{2Aq}{3}$. Verum eſt, Fractiones duas præmiſſas ab *Oughtredo* Clav. Mathemat. Cap. 7. §. 2. reduci per $3A$ & $2Aqq$. Et tantundem valet Reductio alterutra, ut conſtabit ex collatis Exemplis. Sed cum neque $3A$ neque $2Aq$ reperitur, niſi dividendo ſeparatim & quaſi tranſverſim partem Numeroſam Denominatoris per partem Numeroſam Numeratoris, & deinde partem Speciosam Numeratoris per partem Speciosam Denominatoris; viſum erat oſtendere, quod Praxis inſtitui potuerit, ſumendo utrobique totum Denominatorem pro Diviſore, totum Numeratorem pro Dividendo.

Ad §. IX. Simili modo, quo Fractio Compoſita reducitur ad Simplicem, poteſt Fractio minoris Denominationis extrinſecæ reduci in Fractionem majoris. Ut $3\frac{1}{2}$ den. $= \frac{7}{480}$ l. Nam $3\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{7}{2}$ d $= \frac{7}{2}$ de $\frac{1}{12}$ de $\frac{1}{20}$ l $= \frac{7}{480}$ l.

Ad §. X. & XI. Eodem artificio, quo Fractiones Vulgares reducuntur ad Decimales, poſſunt Partes Vulgatæ ſeu uſitatæ Nummorum, Ponderum &c. reduci in Partes Decimales. Nempe $1^s = \frac{1}{20}$ l $=$ l.05l. Nam $20)1$ l.00 (l.05l. Item $5^s = \frac{5}{20}$ l $=$ l.25. Nam $20)5$ l.00 (l.25l.

Et

Et quia 1^s seu $\frac{1}{20}{}^l = 20) 1_L00 = {}_L05^l$, idcirco viciſſim ${}_L05^l \times 20 = 1_L00$ seu 1^s. Item quia 5^s seu $\frac{5}{20}{}^l = 20) 5_L00 = {}_L25^l$, idcirco viciſſim ${}_L25^l \times 20 = 5_L00$ seu 5^s: Hoc eſt, Partes Decimales alicujus Integri dati convertuntur in Partes uſitatas ejuſdem Integri, modo multiplicentur per numerum Partium uſitatarum Integro dato æquivalentem.

At in gratiam Arithmeticorum Practicorum conſtructæ ſunt Tabulæ Decimales ſubſequentes, quæ exhibent Partes Decimales Nummorum, Ponderum, &c. Partibus uſitatis congruentes.

Tab. I.

Exhibens *Solidos, Denarios,* & *Quadrantes* in Partes Decimales *Libræ* Pecuniariæ Anglicanæ converſos.

Solidi	*Part. Dec. Lib. Ang.*	*Denarii*	*Part. Dec. Lib. Ang.*
19	.95	11	.0458333
18	.9	10	.0416666
17	.85	9	.0375
16	.8	8	.0333333
15	.75	7	.0291666
14	.7	6	.025
13	.65	5	.0208333
12	.6	4	.0166666
11	.55	3	.0125
10	.5	2	.0083333
9	.45	1	.0041666
8	.4	*Quadr.* 3	.003125
7	.35	2	.0020833
6	.3	1	.0010416
5	.25		
4	.2		
3	.15		
2	.1		
1	.05		

Tab.

Tab. II.

Exhibens *Grana minora*, Anglice Grains, in Partes Decimales *Unciæ* conversa. NB. Reductio Granorum majorum, Anglice Penny-weights, omittitur, quippe (cùm 20 Grana majora æquent 1 Unciam, haud secus ac 20 Solidi æquant 1 Libram) eadem omnino est ac Reductio Solidorum in Tab. I. putà 19 Gr. maj. = ℔95 Unciæ, 18 Gr. maj. = ℔9 Unciæ, &c.

Grana minora	*Part. Dec. Unciæ*	*Grana minora*	*Part. Dec. Unciæ*
23	.0479166	11	.0229166
22	.0458333	10	.0208333
21	.04375	9	.01875
20	.0416666	8	.0166666
19	.0395833	7	.0145833
18	.0375	6	.0125
17	.0354166	5	.0104166
16	.0333333	4	.0083333
15	.03125	3	.00625
14	.0291666	2	.0041666
13	.0270833	1	.0020833
12	.025		

Tab. III.

Exhibens *Digitos* in Partes Decimales *Pedis* conversos.

Digiti	*Part. Dec. Pedis*	*Digiti*	*Part. Dec. Pedis*
11	.9166666	4	.3333333
10	.8333333	3	.25
9	.75	2	.1666666
8	.6666666	1	.0833333
7	.5833333	$\frac{3}{4}$	.0625
6	.5	$\frac{2}{4}$	.0416666
5	.4166666	$\frac{1}{4}$	.0208333

Tab.

Tab. IV.

Exhibens *Menses* (ex Diebus 28 constantes, & quorum 13 complent Annum, neglecto Die residuo) & *Dies* in Partes Decimales *Anni* conversos, *Horas* & *Scrupula Prima* in Partes Decimales *Diei*.

Menses	*Partes Decimal. Anni*
12	.9230768
11	.8461537
10	.7692306
9	.6923076
8	.6153846
7	.5384615
6	.4615384
5	.3846153
4	.3076923
3	.2307692
2	.1538461
1	.0769230
Dies 27	.0739736
20	.0547952
10	.0273976
9	.0246579
8	.0219182
7	.0191784
6	.0164386
5	.0136988
4	.0109591
3	.0082193
2	.0054795
1	.0027397
Horæ	*P. Dec. Diei*
23	.9583333
18	.75

Horæ	*P. Dec. Diei*
12	.5
11	.4583333
10	.4166666
9	.375
8	.3333333
7	.2916666
6	.25
5	.2083333
4	.1666666
3	.125
2	.0833333
1	.0416666
Scrupula 59	.0409722
45	.0312500
40	.0277777
30	.0208333
20	.0138888
15	.0104166
10	.0069444
9	.00625
8	.0055555
7	.0048611
6	.0041666
5	.0034722
4	.0027777
3	.0020833
2	.0013888
1	.0006944

Usus Tabularum hic est. Tabula quævis constat ex duplici serie, quarum sinistra continet Partes usitatas Nummorum, Ponderum &c; dextra, Partes Decimales. Quare Numero quovis Partium usitatarum invento in serie sinistra, adstabit in dextra æquivalens Partium Decimalium Numerus. Et vice versa. Ex. gr. Proponantur 3 l. 15 s. 6 d. 2 q, è quibus velis convertere 15 s. 6 d. 2 q in Decimales. In Tab. I. numero 15 s adstat ad dextram Decimalis ,75 l, item 6 d adstat ,025 l, & 2 q adstat ,002083 l sive contractius ,0021 l. (Nam $\frac{1}{1000}$ tantundem valet ac $\frac{83}{100000}$, & paulo plus.) Quare, cum ,75 + ,025 + 0021 = ,7771, erunt 3 l. 15 s. 6 d. 2 q = 3 ,7771 l.

Et hinc colligi potest, quod, si Partes Decimales ,7771 essent vicissim convertendæ in Partes usitatas, ipse Numerus ,7771 non esset reperiendus in Tabula, sed Reductio peragenda esset hunc ad modum: Primo sumendus esset Numerus Partium Decimalium numero dato minor eiq; maxime affinis, puta ,75 = 15 s: Tum quia ,7771 — ,75 = ,0271, qui etiam Numerus in Tabula non extat, sumendus esset iterum Numerus numero ,0271 minor eique maxime affinis, puta ,025 = 6 d. Denique ,0271 — ,025 = ,0021 sive 002083 = 2 q. Quare 3, 7771 l = 3 l. 15 s. 6 d. 2 q.

NB. 1. Si Pars usitata Anni, Diei, aut Horæ in Tab. IV. (brevitatis gratia) non expressa, (puta 15 d, 21 h, 55′) proponatur in Partes Decimales convertenda, pro Parte proposita sumantur aliæ quævis duæ (puta 8 d + 7 d, 18 h + 3 h, 45′ + 10′) eandem componentes. Summa Decimalium hisce respondentium dabit Decimalem Parti propositæ congruentem. (Puta, ,0191784 + ,0219182 = ,0410966 Ann. = 15 d, ,75 + ,125 = ,875 d = 21 h, ,0312500 + ,0069444 = ,0381944 d = 55′.

2. Numerus Solidorum (itemque Granorum majorum) datus, si bisecetur, exhibet Decimalem respondentem. Puta 16 s = ,8 l, 10 s = ,5 l, 2 s = ,1 l, 15 s = ,75 l, hoc est, 2)150(75, 9 s = ,45 l, 1 s = ,05 l. Ratio est, quia Solidus (itemque Granum majus) est pars vicesima, h. e. bis decima Libræ; puta 16 s = $\frac{16}{20}$ l = $\frac{8}{10}$ l seu ,8 l, &c.

Ad §. XII. Fractionum Decimalium Usus quanto compendiosior sit, quam Sexagesimalium, Exemplo illustravit Cl. *Wallisius* in *Opere Arithmetico* sive *Math. Univ.* Cap. 44.

In

In Reductione Fractionum Sexageſimalium in Decimales, & vice verſa, ubique pro 60 uſurpari poteſt 6, modo Reductio prior moveat in Quoto Lineam Separatricem uno loco verſus ſiniſtram, poſterior eandem in Producto moveat uno loco verſus dextram. Nempe in Reductione Sexageſim. 45′ in Decimalem ₁75, perinde erit ſive divides per 60, viz. 60) 45₁00 (₁75, ſive per 6, Linea Separatrice uno loco verſus ſiniſtram mota, puta 6) 45₁0 = (non 7₁5 ut oportuit juxta communem Praxin, ſed) ₁75. Item in Reductione Decim. ₁75 ad Sexageſ. 45′, perinde erit ſive multiplicabis per 60, puta ₁75 x 60 = 45₁00, ſive per 6, Linea Separatrice uno loco verſus dextram mota, puta ₁75 x 6 = (non ut oportuit juxta communem Praxin 4₁50 ſed) 45₁0 ſeu 45. Et hoc eſt, quod docet *Oughtredus* Clav. Mathemat. Cap. VI. § 18. hiſce verbis: *Diviſio per* 60 *removet Lineam Separatricem*, &c.

NB. Veteres non tantum diſtribuerunt Horam vel Gradum in 60 Minuta Prima, Minutum Primum in 60 Secunda, &c. quas Partes dixerunt Sexageſimas, verum etiam, quo Numeros grandiores vitarent, 60 Integrorum collectiones *Sexagenas* vocarunt, & harum totidem *Sexagenas Secundas*; & ſic porro. V. g. pro 227015 (qui eſt numerus Dierum, quibus Arabum Epocha, *Hegira* dicta, ſerius incipit, quam noſtra Annorum Chriſti Epocha Dionyſiana) ponunt 1, 3, 3, 35°, hoc eſt, 1 Sexagenam tertiam, 3 Sexagenas ſecundas, 3 Sexagenas primas, & 35 dies. Et hanc computandi rationem habemus in Tabulis *Alphonſinis* & *Lansbergianis*.

Ad §. XIII. Non opus eſt ubique maxima Menſura communi. Nam ſi Quantitatibus Surdis per communem quemlibet Diviſorem diviſis prodeant Quoti Rationales, Quantitates diviſæ erunt Rationales ſive Commenſurabiles.

Quod Laterum Surdorum homogeneorum Multiplicatio aut Diviſio procreet Latus etiam Surdum homogeneum, colligit *Oughtredus* ex eo quod Numerorum vere Figuratorum homogeneorum Multiplicatio aut Diviſio procreat Numerum vere Figuratum homogeneum, cujus Latus æquale eſt Facto à Lateribus Numerorum datorum, aut Quoto Lateris Dividendi ad Diviſoris Latus applicati. Ut

Cub. 343 x C. 27 = C. 9261. Et vi- Cub. 27) C. 9261 (C. 343
Lat. 7 x L. 3 = L. 21. ciſſim Lat. 3) L. 21 (L. 7

Quare & in Surdis, $\sqrt{c}\,343 \times \sqrt{c}\,27 = \sqrt{c}\,9261$. Et vicissim $\sqrt{c}\,27) \sqrt{c}\,9261 (\sqrt{c}\,343$. Et sic in Surdis aliis.

Surdorum Compositorum Operationes pendent ab Operationibus Surdorum simplicium, & Regulis Signorum + & — Algebraicis. Ex. gr.

$\sqrt{c}\,56 + \sqrt{c}\,16$ Nam $\sqrt{c}\,7) \sqrt{c}\,56 (\sqrt{c}\,8 = 2$
$\sqrt{c}\,7 - \sqrt{c}\,12$ $\quad\quad\quad

6. $Z+X=2A$. $6+2=2\times4$. 7. $Z-X=2E$. $6-2=2\times2$. Patet ex Additione & Subduct. 1 & 2.

8. $ZX=Aq-Eq=X$. $6\times2=16-4=12$. Patet ex Multiplicatione 1 & 2, & ex 5.

9. $Zq=Aq+2AE+Eq=Z+2Æ$. $36=16+16+4=20+2\times8$. Patet ex 1. 3. & 4.

10. $Xq=Aq-2AE+Eq=Z-2Æ$. $4=16-16+4=20-2\times8$. Patet etiam ex 1, 3. & 4.

11. $Zq+Xq=2Aq+2Eq=2Z$. $36+4=32+8=2\times16+2\times4$. Patet ex Add. 9, 10, & 4.

12. $Zq-Xq=4AE$. $36-4=4\times8$. Patet ex Subduct. 9, 10.

13. $Æq=AqEq$. $64=16\times4$. Patet ex 3.

Porro quia $Z=A+E$, ergo $Z-A=E$ per §. XVI. in 1. $6=4+2$, $6-4=2$. 2.

Item quia $X=A-E$, ergo $X+E=A$ per §. XVI. in 2. $2=4-2$, $2+2=4$. 1.

Rursus quia $Z+X=2A$, ergo $\frac{1}{2}Z+\frac{1}{2}X=A$ per §. XVI. in 6. $6+2=2\times4$, $3+1=4$. 4.

Item quia $Z-X=2E$, ergo $\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}X=E$ per §. XVI. in 7. $6-2=2\times2$, $3-1=2$. 4.

Item quia $Zq-Xq=4AE$, ergo $\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Xq=Æ$ per §. XVI. in 12. $36-4=4\times8$, $9-1=8$. 4.

NB. Ex Æquationibus præmissis deduci potest Inventio, atque adeo Demonstratio Speciosa, decem priorum Propositionum in *Euclidis* Elemento secundo. Nam

$Zq=Aq+Eq+2AE$ est ipsa Prop. 4.

$Zq+Xq=2Aq+2Eq$ est ipsa Prop. 10. Ergo

$\frac{1}{2}Zq+\frac{1}{2}Xq=Aq+Eq$ est ipsa Prop. 9.

Porro

Porro quia $Z = A + E$, ergo per æqualem Multiplicationem

$BZ = BA + BE$. Prop. 1.
$ZZ = ZA + ZE$. Prop. 2.
$ZA = Aq + AE$ vel $ZE = Eq + AE$ } Prop. 3.

Item quia $Z = A + E$, ergo $A = Z - E$, vel $E = Z - A$. Ergo $Aq = Zq - 2ZE + Eq$, vel $Eq = Zq - 2ZA + Aq$. Coroll. Prop. 7. Ergo $2ZE + Aq = Zq + Eq$, vel $2ZA + Eq = Zq + Aq$. Prop. 7.

Et proinde $4ZE + Aq = Zq + 2ZE + Eq$, vel $4ZA + Eq = Zq + 2ZA + Aq$. Prop. 8.

Rursus quia $ZX = Aq - Eq$. Ergo $ZX + Eq = Aq$. Prop. 6.

Et quia $\frac{1}{4}Zq - \frac{1}{4}Xq = AE$. Ergo $\frac{1}{4}Zq = AE + \frac{1}{4}Xq$. Prop. 5.

Plura de hujusmodi Æquationibus sive Ligaturis vide in Cap. XI. *Clav. Mathemat.*

NB. Ex hujusmodi primis ac facillimis Æquationibus, in quibus Tyronem Analyticum bene versatum esse oportet, aliæ innumeræ deduci possunt, per Additionem, Subductionem, Multiplicationem, Divisionem, necnon Interpretationem, sumendo nimirum id quod alteri æquale inventum est, loco ejus cui æquatur. Quæ quidem Analytica supellex est non minus pretiosa, quam copiosa.

CAP.

CAP. XI.

De Proportione.

I. CUm *Ratio* ſit unius Numeri ad alium habitudo, in duobus ſemper conſiſtit Terminis, è quibus is qui refertur ad alium, & prior ſtatui ſolet, dicitur *Antecedens* Rationis; poſterior ſive is ad quem prior refertur, *Conſequens* Rationis. Et duobus quibuſvis Numeris datis, eorum Ratio invenitur dividendo Antecedentem per Conſequentem. Ut Ratio 12 ad 4 eſt tripla, nempe 4)12(3.

II. *Proportio*, quæ & *Analogia* dicitur, eſt Rationum ſimilitudo. Nempe ſi è quatuor Numeris datis, ſimilis ſit Ratio primi ad ſecundum, ac tertii ad quartum; dicuntur quatuor illi Numeri eſſe proportionales. Ex. gr. Quia 2)6(3, & 4)12(3, idcirco 6 : 2 :: 12 : 4. Item quia 12)6($\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, & 24)12($\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$; idcirco 6 : 12 :: 12 : 24. Ubi nota, quod in Exemplo ultimo Proportio dicatur *Continua*, (cujus Signum eſt ∴,) quia Conſequens Rationis prioris *continue* ſtatuitur etiam Antecedens Rationis poſterioris; in primo, *Diſcontinua*, quia non item. Rurſus Proportio Continua, ſi longius *progrediatur* aut *progredi* cogitetur, peculiari nomine videtur appellari *Progreſſio*. Ut 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c. ſunt ∴ ſeu continue proportionales, adeoque conſtituunt Progreſſionem. Item 8, 12, 18, 27, &c. Item α, β, $\frac{\beta q}{\alpha}$, $\frac{\beta c}{\alpha q}$, $\frac{\beta qq}{\alpha c}$, &c. Nam 2 : 4 :: 4 : 8 :: 8 : 16 :: 16 : 32 :: 32 : 64, &c. Item 8 : 12 :: 12 : 18 :: 18 : 27, &c. Item $\alpha : \beta :: \beta : \frac{\beta q}{\alpha} :: \frac{\beta q}{\alpha} : \beta) \frac{\beta qq}{\alpha q} = \frac{\beta c}{\alpha q}$ &c.

III. Nu-

III. Numeris duobus datis (æqualiter auctis vel imminutis, h. e.) per eundem Numerum multiplicatis vel divisis, servatur Ratio data. Adeoque Facti Multiplicatis, Quoti Divisis erunt proportionales. Putà $3)9(3$, & $3\times2)9\times2(3$, h. e. $6)18(3$. Adeoque $9:3::(9\times2:3\times2::)18:6$. Vel $6)18(3$, & $\frac{6}{2})\frac{18}{2}(3$, h. e. $3)9(3$. Adeoque $18:6::(\frac{18}{2}:\frac{6}{2}::)9:3$. Item $C:B::CA:BA$. Vel $CA:BA::(\frac{CA}{A}:\frac{BA}{A}::)C:B$.

NB. Et vicissim, è quatuor quibusvis Numeris proportionalibus aliqui duo sunt Facti aut Quoti duorum reliquorum per unum aliquem eundemque Numerum multiplicatorum aut divisorum.

IV. Quare, si quatuor Numeri sint proportionales, Factus ab *extremis* æquatur Facto à *medis*. Nempe revera iidem utrobique sunt Factores, & idcirco iidem seu æquales erunt utrobique Facti. Ex. gr. $3:4::(3\times2:4\times2::)6:8$. Ideoque $3\times8=4\times6$, h. e. $3\times4\times2=4\times3\times2$.

NB. Et vicissim, si, propositis ordine quatuor Numeris, Factus ab extremis æquetur Facto à mediis, Numeri propositi sunt proportionales: (Et hoc dicetur *Corollarium* Theorematis præcedentis.) Putà, si $6\times4=8\times3$, tum $6:3::8:4$. Vel $6:8::3:4$, &c. uti fusius indicabitur §. VI.

V. Theoremati §. IV. tradito innititur *Regula Proportionis*, (quæ ob insignem ejus usum in Artibus universis vulgo appellitatur *Regula Aurea*,) viz. Si è *tribus* Numeris datis, secundus multiplicet tertium, & primus dividat Factum: Quotus erit tribus datis *quartus* proportionalis. Tres Numeri dati sunto 3, 4, 9; & pro quarto quæsito statuatur Q. Est igitur $3:4::9:Q$. Quare per §. IV. $3\times Q=4\times9$. Ideoque,

eoque, cùm $\frac{3 \times Q}{3} = Q$, erit etiam $\frac{4 \times 9}{3} = (Q$ h.e.)
12. Item 2 : 3 :: 6 : $\left(\frac{3 \times 6}{2}\right.$ h.e.$\left.\right)$ 9. Sic A : B :: C : $\frac{CB}{A}$.

1. E tribus Numeris datis duo primi innuunt Rationem, quorum prior semper esse debet homogeneus sive homonymus Termino reliquo sive tertio, qui ingreditur Quæstionem. Et si Terminus hic, per quem fit Quæstio, quo *major* est, eo quartum *majorem* requirat; & quo *minor*, eo *minorem*; Proportio *Directa* dicitur: sin contra, quo *major* est, eo quartum *minorem* requirat; quo *minor*, eo *majorem*; Proportio *Reciproca* nuncupatur. In illa (uti jam dictum est) Terminus *primus* dividit Factum ex Terminis *secundo* & *tertio*, ut habeatur quartus proportionalis: in hac Terminus *tertius* dividit Factum ex Terminis *primo* & *secundo*, ut habeatur quartus proportionalis. Ex. gr.

Exemplum Proportionis Directæ.

Unus Gradus majoris Circuli Cœlestis vulgo supponitur æquari 60 Milliaribus Italicis in Terra. Igitur 360 Gradus quot Milliaribus æquantur? seu quot Milliarium est tota Terræ circumferentia secundum hanc Rationem?

gr. mill. gr. $\frac{360 \times 60}{1}$ mill.
1 : 60 :: 360 : h. e. 21600.

Exemplum Proportionis Reciprocæ.

Arcis Præfectus annona, quam habet, alere potest 7 Mensibus Præsidiarios 1500. Igitur Mensibus 12 quot alet Præsidiarios?

mens. præsid. mens. præsid.
7 : 1500 :: 12 : $\frac{1500 \times 7}{12}$ h. e. 875.

2. Quamvis Regula Proportionis Reciprocæ à Regula Proportionis Directæ aliquantulum discrepet, tamen utriusque ratio omnino eadem est. Nempe quemadmodum in Prop. Dir. $\frac{\text{Term. } 2^{us} \times \text{Term. } 3^{us}}{\text{T. } 1^{us}} = \text{T. } 4^{us}$, quia $\text{T. } 2^{us} \times \text{T. } 3^{us} = \text{T. } 1^{us} \times \text{T. } 4^{us}$; sic in Prop. Reciproca $\frac{\text{T. } 1^{us} \times \text{T. } 2^{us}}{\text{T. } 3^{us}} = \text{T. } 4^{us}$, quia $\text{T. } 1^{us} \times \text{T. } 2^{us} = \text{T } 3^{us} \times \text{T. } 4^{us}$. Certe Proportio Reciproca in Directam convertitur, Termino tertio in locum primum transposito: Puta, $7^{m.} : 1500^{pr.} :: 12^{m.} : 875^{pr.}$ est Proportio Reciproca: sed $12 : 7 :: 1500 : 875$ est Proportio Directa. Ideoque tam in illa quam in hac $\frac{1500 \times 7}{12} = 875$.

3. A *tribus* Numeris datis Regula Aurea vocitatur etiam *Regula Trium*, scilicet Terminorum. Quod si Termini primus & tertius annexam habeant qualemcunque Circumstantiam, atque adeo dentur plures quàm tres Termini; tum dicitur Regula Aurea *Composita*. Quatenus nimirum hujusmodi Quæstiones constant ex binis Analogiis, adeoque Regulæ simplicis Operationem bis esse instituendam postulant. Nempe si Analogiarum Componentium utraque fuerit Directa, tum Regulæ Directæ Operatio bis instituenda est: sin alterutra fuerit Reciproca, instituenda est semel Operatio Regulæ Directæ, semel Reciprocæ. Illa dici solet *Regula Aurea Composita Directa*; hæc, *Regula Aurea Composita Reciproca*.

Exemplum Regulæ Aur. Comp. Directæ.

Si 4 Academici Mensibus 3 expendant 20 Libras, quot Libras expendent 6 Academici Mensibus 12, secundum eandem Rationem.

Analogia Compoſita.

Ac. menſ. libr. Ac. menſ. libr.
4 : 3 : 20 :: 6 : 12 : Q = 120. Nam

Analogiæ Simplices

Direct. $4^{A} : 20^{l} :: 6^{A} : q = \frac{20 \times 6}{4} = 30^{l}$

Direct. $3^{m} : q = \frac{20 \times 6^{l}}{4} :: 12^{m} : Q = \frac{q \times 12}{3} = \frac{20 \times 6 \times 12}{4 \times 3}$
$= 120^{l}$.

Exemplum Regulæ Aur. Comp. Reciprocæ.

Si 36 Libræ Panis ſufficiant Militibus 3 in Dies 6, Libræ 180 Militibus 9 in quot Dies ſufficient?

Analogia Compoſita.

libr. Mil. d. libr. Mil. d.
36 : 3 : 6 :: 180 : 9 : Q = 10. Nam

Analogiæ Simplices

Direct. $36^{l} : 6^{d} :: 180^{l} : q = \frac{6 \times 180}{36} = 30^{d}$

Recipr. $3^{m} : q = \frac{6 \times 180^{d}}{36} :: 9^{m} : Q = \frac{3 \times q}{9} = \frac{3 \times 6 \times 180}{9 \times 36}$
$= 10^{d}$.

4. NB. Ex ipſis Exemplis præmiſſis conſtat Ratio abſolvendi utramque Regulam Compoſitam Operatione unica, h. e. abſque reſolutione ſive hujus ſive illius in binas Analogias ſimplices. Nempe quia in Exemplo primo $Q = \frac{20 \times 6 \times 12}{4 \times 3}$, & in Exemplo ſecundo $Q = \frac{3 \times 6 \times 180}{9 \times 36}$, patet quod, ſi Diviſor compoſitus ex binis Diviſoribus Analogiarum componentium

tium (h. e. ex Terminis primis utriuſque Analogiæ ſimplicis in Reg. Comp. Directa; in Reciproca autem ex Termino primo Analogiæ ſimplicis Directæ, & tertio Reciprocæ) metiatur Dividendum ex reliquis Terminis datis continue multiplicatis compoſitum, Quotus ſic inventus exhibuerit Terminum quæſitum. Hoc autem efferri ſolet juxta Regulas vulgatas hunc ad modum:

5. Proportio Compoſita Directa convertitur in Simplicem, ſtatuendo Factum ex duobus prioribus Terminis datis pro Termino primo, itemque Factum ex duobus poſterioribus Terminis datis pro Termino tertio. Ut $4 \times 3 : 20 :: 6 \times 12 : Q = \frac{20 \times 6 \times 12}{4 \times 3} = 120$, ut prius.

6. Proportio Compoſita Reciproca convertitur in Simplicem, ſtatuendo Factum ex Terminis datis ſecundo & quarto pro Termino primo, itemque Factum ex Terminis datis primo & quinto pro Termino tertio. Ut $3 \times 180 : 6 :: 36 \times 9 : Q = \frac{3 \times 180 \times 6}{36 \times 9} = 10$, ut prius.

7. Quæ jam dicta ſunt de Regula Compoſita (ex binis Analogiis, ſive uti vulgò dici ſolet) quinque Terminorum datorum, valent etiam in Regula Compoſita (ex Analogiis quotcunque, ſive, uti vulgo dicitur) Terminorum datorum quotcunque. Eſt enim hæc Regula univerſalis, viz. Si Diviſor ex omnibus Diviſoribus ſimplicibus compoſitus metiatur Dividendum pariter ex omnibus Dividendis ſimplicibus compoſitum, Quotus exhibebit Terminum quæſitum. Et de collocandis Terminis quotcunque datis hæc eſto Regula generalis, viz. Terminus quilibet ante [::] debet eſſe homogeneus Termino ejuſdem ordinis poſt [::].

[::]. Utrobique autem eorum ducat Terminus principalis, ſive cui reliqui appendent.

8. Denique Proportionis cujuſcunque Operatio poteſt ſæpenumero reddi facilior, deprimendo Terminum diviſivum una cum alterutro ex reliquis datis per Communem Menſuram. Ut 12 : 8 :: 15 : 10. Vel (12 & 8 reductis per communem Menſuram 4 ad 3 & 2) 3 : 2 :: 15 : 10. Vel (3 & 15 reductis per 3 ad 1 & 5) 1 : 2 :: 5 : 10. Item 2b : 3ab :: 4d : 2b) 12abd. Vel b : 3ab :: 2d : b) 6abd. Vel 1 . 3a :: 2d : 6ad.

VI. Quemadmodum Theorema §. IV. traditum edocet inveſtigationem Termini quarti proportionalis, ſic ejuſdem Corollarium oſtendit, dati quatuor Termini fuerint necne proportionales. Quare hujus ope probatur, quod ſi quatuor Quantitates ſint *directe* proportionales, puta A : α :: B : β, ſeu 8 : 4 :: 6 : 3; etiam *alterne*, & *inverſe*, & *compoſite*, & *diviſim*, & *converſe*, & *mixtim* proportionales erunt. Ex. gr.

Si fuerit Directe	A	:	α	:: B	:	β		
	8	:	4	:: 6	:	3		
Erit Alterne *Eucl. El. 5. pr. 16.*	A	:	B	:: α	:	β		
	8	:	6	:: 4	:	3		
Inverſe *Ibid. Cor. pr. 4.*	α	:	A	:: β	:	B	Nam ubiq; Factus ab Extremis æquatur Facto à Mediis.	
	4	:	8	:: 3	:	6		
Compoſite *Ibid. pr. 18.*	A+α	:	α	:: B+β	:	β		
	8+4	:	4	:: 6+3	:	3		
				Vel				
	A+B	:	B	:: α+β	:	β		
	8+6	:	6	:: 4+3	:	3		

Diviſim

Divisim Ib. pr. 17.

$$\left\{\begin{array}{llll} A-\alpha: & \alpha & ::B-\beta: & \beta \\ 8-4: & 4 & ::6-3: & 3 \end{array}\right.$$

Vel

$$\left\{\begin{array}{llll} A-B: & B & ::\alpha-\beta: & \beta \\ 8-6: & 6 & ::4-3: & 3 \end{array}\right.$$

Converse Ib. Cor. 19.

$$\left\{\begin{array}{llll} A & :A\pm\alpha & ::B & :B\pm\beta \\ 8 & :8\pm4 & ::6 & :6\pm3 \end{array}\right.$$

Vel

$$\left\{\begin{array}{llll} A & :A\pm B & ::\alpha & :\alpha\pm\beta \\ 8 & :8\pm6 & ::4 & :4\pm3 \end{array}\right.$$

Nam ubique Factus ab Extremis æquatur Facto à Mediis.

Mixtim

$$\left\{\begin{array}{l} A+\alpha:A-\alpha::B+\beta:B-\beta \\ 8+4:8-4::6+3:6-3 \end{array}\right.$$

Vel

$$\left\{\begin{array}{l} A+B:A-B::\alpha+\beta:\alpha-\beta \\ 8+6:8-6::4+3:4-3 \end{array}\right.$$

VII. Quare si quotlibet Quantitates sint proportionales, erit ut unus Antecedens ad suum Consequentem, sic Summa Antecedentium ad Summam Consequentium. Esto $A:\alpha::B:\beta::C:\gamma::D:\delta$. Erit $A:\alpha::A+B+C+D:\alpha+\beta+\gamma+\delta$.

Nam

$$\left\{\begin{array}{l} A:\alpha::B:\beta. \text{ Et Alterne \& Composite} \\ A+B:B::\alpha+\beta:\beta. \text{ Et rursus Alterne} \\ A+B:\alpha+\beta::(B:\beta::)C:\gamma. \text{ Itidem} \\ A+B+C:C::\alpha+\beta+\gamma:\gamma. \\ A+B+C:\alpha+\beta+\gamma::(C:\gamma::)D:\delta, \&c. \end{array}\right.$$

Item in $\frac{\cdot}{\cdot\cdot}$, (ubi Terminus primus sit α, ultimus ω, & Summa omnium Terminorum Z, adeoque per §. II.

Summa

Summa omnium Antecedentium $Z-\omega$, Summa omnium Conſequentium $Z-\alpha$. In hujuſmodi ſerie) $\alpha:\beta::Z-\omega:Z-\alpha$. Quare per *Theorema* §. IV. $\alpha Z-\alpha q=\beta Z-\beta\omega$. Ideoque per §. XVI. Cap. X. $\beta Z-\alpha Z=\beta\omega-\alpha q$. Et idcirco $\frac{\beta\omega-\alpha q}{\beta-\alpha}=\left(\frac{\beta Z-\alpha Z}{\beta-\alpha}=\right)Z$.

VIII. Hinc liquet Inventio Summæ Terminorum quotvis ÷ ſive Progreſſionis, nempe per Regulam iſtam $\frac{\beta\omega-\alpha q}{\beta-\alpha}\div=Z$. Ex. gr. Proponantur hi Termini ÷, viz. 3:9:27:81:243:729. Summa $=\frac{9\times729-9}{9-3}=\frac{6552}{6}=1092$.

IX. Hactenus de Proportione, quæ eſt *Rationum* ſimilitudo, & dici ſolet *Geometrica*. Eſt autem alia Proportio, quæ dicitur *Arithmetica*, & eſt ſimilitudo *Differentiarum*: nempe quando in quatuor Numeris eadem eſt Differentia tertii & quarti, quæ eſt primi & ſecundi; dicuntur illi Numeri eſſe Arithmetice proportionales. Ut 7:4::12:9, hoc eſt, 7:7−3::12:12−3.

NB. Proportio Geometrica ita appellari videtur, quia Numeri *Geometrici*, ſcilicet Poteſtates omnes ab eadem Radice ortæ, ſunt in ejuſmodi Proportione. Ut 3:9::27:81::243:729, &c. Proportio Arithmetica inde nomen ſortiri videtur, quod ipſa Numerorum, Græce Ἀριθμῶν, ſeries in hac Proportione ordinatur. Ut 1:2::3:4::5:6, &c. h. e. 1:1+1::3:3+1::5:5+1, &c.

X. Quare è quatuor Numeris Arithmetice proportionalibus, Summa Extremorum æquatur Summæ Mediorum.

diorum. Ut $1+4=2+3$, hoc est, $1+3+1=1+1+3$. Item $7+9=4+12$, h. e. $7+12-3=7-3+12$.

XI. Et si è tribus Numeris datis secundus addatur tertio, & primus tollatur è Summa; reliquus erit quartus Arithmetice proportionalis. Ut si dentur 7, 4, & 12; erit $(12+4-7=)$ 9 quartus quæsitus.

XII. Est etiam Proportio Continua sive Progressio Arithmetica, quando omnes Termini à primo eadem continue procedunt Differentia. Ut 4:7:10:13:16:19, &c. h. e. 4:7::7:10::10:13::13:16, &c. Ubi Differentia communis est 3, & quilibet Terminus conflatur ex Primo & Differentia (toties addita, quoties indicat ipsius Termini à Primo *Distantia*, h. e.) in *Distantiam* ducta. Ex. gr. Terminus in serie præmissa quintus conflatur ex Termino primo & Differentia (quater addita sive) in Distantiam ducta, viz. $16=4+3+3+3+3$, sive $4+\overline{3\times 4}$. Quare hæc erit series Specierum Arithmeticè proportionalium, viz. $A:A+D:A+2D:A+3D:A+4D:A+5D$, &c. Ubi D indicat Differentiam; Figura affixa, Distantiam.

XIII. Hinc in Progressione Arithmetica, Summa Extremorum æquatur Summæ duorum quorumvis Mediorum ab Extremis æquidistantium. Ut in serie Specioſa A pl. $A+5D=A+D$ pl. $A+4D=A+2D$ pl. $A+3D$. Item in serie priori Numerosa $4+19=7+16=10+13$. Nempe quanto Terminus secundus exuperat primum, & tertius secundum &c; tanto viciſſim Terminus ultimus exuperat penultimum, & hic antepenultimum &c; atque adeo servatur ubique æqualitas.

XIV. Quare si in Progressione Arithmetica, Terminus primus addatur ultimo, & Summa ducatur in Numerum Terminorum dimidiatum; Factus erit Summa

Summa totius Progreſſionis. Ut $4+7+10+13+16+19 = (4+19$ pl. $7+16$ pl. $10+13 = 4+19$ pl. $4+19$ pl. $4+19 =) 4+19, \times 3 = 69$.

At quoniam ſæpe evenit, ut Numerus Terminorum ſit impar, adeoque dimidiari (aut ſaltem dimidiatus, Praxi expediendæ) minus aptus; hinc maluit *Oughtredus* Regulam efferre hunc ad modum; Summa totius Progreſſionis invenitur ducendo Summam Terminorum primi & ultimi in Numerum omnium Terminorum, & dimidiando Factum. Patet enim $4+19, \times 3 = \frac{4+19, \times 3 \times 2}{2}$, h.e. $\frac{4+19, \times 6}{2} = 69$.

XV. Quemadmodum Terminus quilibet Progreſſionis Arithmeticæ conſtat ex Summa Termini Primi & Differentiæ toties ſibimet additæ, quoties indicat ipſius Termini à Primo Diſtantia; ita Terminus quilibet Progreſſionis Geometricæ conſtat ex Facto Termini Primi & Rationis toties in ſe ductæ, quoties indicat ipſius Termini à Primo Diſtantia. Ex. gr. Dentur 3, 6, 12, 24, 48, &c. ∴. Terminus à Primo quartus conſtat ex Facto Termini primi & Rationis quater in ſe ductæ, viz. $48 = (3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ h.e.$) 3 \times 16$. Quare hæc erit ſeries Specierum Geometrice proportionalium, viz. $A : AR : AR^2 : AR^3 : AR^4 : AR^5$ &c. Ubi R denotat Rationem communem, Figura appenſa ejuſdem (à Term. 1° Diſtantiam, adeoq;) Involutionem.

XVI. Hinc, ſi ſupra ſeriem Terminorum in Progreſſione Geometrica ſtatuatur ſeries Terminorum in Progreſſione Arithmetica; ex quotcunque Differentiis Termino primo additis conſtat quilibet Terminus Progreſſionis Arithmeticæ, ex totidem Rationibus in Terminum primum continue ductis conſtabit Terminus ſuppoſitus Progreſſionis Geometricæ, & vice verſa: Ex. gr.

Pr.A. A. A+D. A+2D. A+3D. A+4D. A+5D.
Pr.G. A. A×R. A×R². A×R³. A×R⁴. A×R⁵.

Item

Pr.A. 4. 6. 8. 10. &c.
Pr.G. 5. 15. 45. 135. &c.

h. e. 4. 4+2. 4+2+2. 4+2+2+2.
5. 5×3. 5×3×3. 5×3×3×3.

XVII. Unde patet, Progreſſionis utriuſvis Terminis aliquot prioribus datis, Terminum aliquem remotiorem reperiri poſſe, ſine continua procreatione Terminorum omnium intermediorum. Puta, A+9D fieri poteſt ex A+4D pl. A+5D — A. Item AR^9 fieri poteſt ex $\frac{AR^4 \times AR^5}{A}$. Ubi obiter vides, quemadmodum Termini Geometrici A & AR^4 & AR^5 reſpondent Terminis Arithmeticis A & A+4D & A+5D, ita Terminum ex $\frac{AR^4 \times AR^5}{A}$ ortum, nempe AR^9, reſpondere Termino ex A+4D pl. A+5D — A orto, nempe A+9D. Et ſic in Terminis Progreſſionis utriuſque Numeroſæ, quia Termini Geometrici 5 & 45 & 135 reſpondent Terminis Arithmeticis 4 & 8 & 10, etiam Terminus ex $\frac{45 \times 135}{5}$ ortus, nempe 1215, reſpondebit Termino ex 8+10—4 orto, nempe 14.

XVIII. Quare ſi velis invenire Terminum aliquem remotiorem Progreſſionis Geometricæ Numeroſæ, hunc ad modum Praxin inſtitues. Supra Terminos aliquot priores Progreſſionis Geometricæ, ſtatuatur pro *Indicibus* ſeries naturalis Numerorum, utpote qui ſunt totidem Termini Progreſſionis Arithmeticæ.

Deinde

Deinde addantur ſimul duo quilibet Indices, quorum Summa Indice primo, ſcilicet Unitate, mulctata æquabit Indicem Termini quæſiti: Terminis duobus Geometricis, qui reſpondent Indicibus ſimul additis, invicem ductis, eorumque Producto per Terminum primum diviſo, prodibit Terminus quæſitus. Ex. gr.

Indices 1. 2. 3. 4. 5. 6. Qr T. 10us.
Termini 2. 4. 8. 16. 32. 64.

$$5 + 6 - 1 = 10.$$

$$\frac{32 \times 64}{2} = 1024.$$

Idcirco & viciſſim, quemadmodum $10 + 1 - 6 = 5$,

ſic $\frac{1024 \times 2}{64} = 32.$

NB. 1. Si Indices à *Cifra*, Termini ab *Unitate* progrediantur, ſupervacanea fiet tum Additio aut Subductio Indicis primi, tum Multiplicatio aut Diviſio Termini primi. (Nempe Cifra in Subductione aut Additione, Unitas in Multiplicatione aut Diviſione nihil mutat.) Adeoque Productus ex duobus quibuſlibet Terminis illico reſpondebit Aggregato Indicum ad Terminos illos ſpectantium. Viz.

Indices 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. Qr T. 10us.
Termini 1. 3. 9. 27. 81. 243. 729.

$$4 + 6 = 10.$$
$$81 \times 729 = 59049.$$

Quare & viciſſim, quemadmodum $10 - 6 = 4$, vel $10 - 4 = 6$,

ſic $\frac{59049}{729} = 81$, vel $\frac{59049}{81} = 729.$

2. Et hinc deducitur Conſtructio & Uſus *Logarithmorum*, quorum Doctrina poſtea tradetur.

NOTÆ.

Ad §. I. Ratio est vel *Æqualitatis*, ut 4 ad 4; vel *Inæqualitatis*, quæ rursus est vel *Majoritatis*, ut 8 ad 4, vel *Minoritatis*, ut 4 ad 8. Porro utraque Ratio tam Majoritatis quam Minoritatis est quintuplex: Illius Species sunt Ratio *Multiplex*, *Superparticularis*, *Superpartiens*, *Multiplex Superparticularis*, *Multiplex Superpartiens*: Hujus Species iisdem Nominibus, præfixa tantum Præpositione *Sub*, designari solent, viz. Ratio *Submultiplex*, *Subsuperparticularis*, *Subsuperpartiens*, &c.

1. Ratio Multiplex est, quando Numerus major minorem *aliquoties* continet, ut 12 ad 6, i. e. Ratio dupla. Nempe Rationis Multiplicis sive Multiplæ quasi totidem species sunt Ratio *dupla*, *tripla*, *quadrupla*, &c. Contra, Ratio istiusmodi Numeri minoris ad majorem dicitur Ratio Submultiplex, ut 6 ad 12, i. e. Ratio subdupla. Nempe Rationis Submultiplicis species habentur Ratio *subdupla*, *subtripla*, *subquadrupla*, &c.

NB. In Ratione Multiplici aut Submultiplici, Numerus minor dicitur Pars *aliquota* Numeri majoris, quippe ille *aliquoties* sumptus hunc accurate metitur, viz. 6 bis metitur 12, absque ullo Residuo. Numerus minor, si non accurate metiatur majorem, dici solet Pars *aliquanta*; ut 7 respectu 12.

2. Ratio Superparticularis est, quando Numerus major minorem *semel* continet, & insuper *unam* ejus Partem aliquotam, scilicet dimidiatam, aut tertiam, aut quartam, &c. In primo Casu dicitur speciatim Ratio *sesquialtera*, ut 3 ad 2, h. e. $1\frac{1}{2}$; in secundo, *sesquitertia*, ut 4 ad 3, h. e. $1\frac{1}{3}$; in tertio, *sesquiquarta*, ut 5 ad 4, hoc est, $1\frac{1}{4}$, & sic deinceps. Contra, Ratio Numeri minoris istiusmodi ad majorem dicitur Subsuperparticularis, & magis speciatim *subsesquialtera*, ut 2 ad 3; vel *subsesquitertia*, ut 3 ad 4; vel *subsesquiquarta*, ut 4 ad 5, &c.

3. Ratio Superpartiens est, quando Numerus major minorem *semel* continet, & insuper *plures* ejus Partes aliquotas, quæ tamen simul sumptæ non constituunt unam aliquotam. Ut 8 ad 5. Nempe 8 continet 5 semel, & tres insuper Unitates, quarum quælibet sigillatim est Pars aliquota, utpote quinta, numeri 5; ipse autem ternarius ex illis compositus, non

non eſt pars una aliquota numeri 5. Hujuſce Rationis multæ ſunt ſubdiviſiones. Nempe 7 ad 5, h. e. $1\frac{2}{5}$ dicitur *ſuperbipartiens quintas*; 8 ad 5, ſive $1\frac{3}{5}$ dicitur *ſupertripartiens quintas*, &c. Item 21 ad 11, ſive $1\frac{10}{11}$ eſt *ſuperdecupartiens undecimas*. Et ſic in aliis. Contra, Ratio 5 ad 7 dicitur Ratio Subſuperpartiens, & magis ſpeciatim *ſubſuperbipartiens quintas*; item 5 ad 8 eſt *ſubſupertripartiens quintas*, &c.

NB. Ratio Superpartiens poteſt paulo aliter & brevius definiri, quando Numerus major minorem *ſemel* continet cum Fractione, cujus Numerator *non eſt* Unitas. Ut 7 ad 5 eſt $1\frac{2}{5}$, &c. Sin Fractionis Numerator *ſit* Unitas, tum dicitur Ratio Superparticularis, ut 6 ad 5 eſt $1\frac{1}{5}$, &c.

4. Ratio Multiplex Superparticularis eſt (quaſi compoſita ex Multiplici & Superparticulari, viz.) quando Numerus major minorem *aliquoties* (bis, terve, &c.) continet, & inſuper (*unam* ejus Partem aliquotam, ſive) Fractionem cujus Numerator *eſt* Unitas. Ut 9 ad 4 eſt $2\frac{1}{4}$; quæ Ratio magis ſpeciatim dicitur *dupla ſeſquiquarta*. Contra, Ratio 4 ad 9 dicitur Submultiplex Subſuperparticularis, & magis ſpeciatim *ſubdupla ſubſeſquiquarta*.

5. Ratio Multiplex Superpartiens eſt (quaſi compoſita ex Multiplici & Superpartiente, viz.) quando Numerus major minorem *aliquoties* continet, & inſuper (*plures* ejus Partes aliquotas non conſtituentes unam aliquotam, ſive) Fractionem, cujus Numerator *non eſt* Unitas. Ut 31 ad 7 eſt $4\frac{3}{7}$, quæ Ratio magis ſpeciatim dicitur *quadrupla ſupertripartiens ſeptimas*, uti in §. I. Cap. VI. *Clav. Mathemat.* Contra, Ratio 7 ad 31 dicitur Submultiplex Subſuperpartiens, & magis ſpeciatim *ſubquadrupla ſubſupertripartiens ſeptimas*.

NB. Ex ante-dictis conſtat, Rationem quamlibet variis modis exprimi poſſe, vel Vocibus, vel Numeris Integris, vel Fractionibus. Ex. gr. Idem omnino valet Ratio *dupla*, vel Ratio 2 ad 1, vel Ratio $\frac{2}{1}$. Item tantundem valet Ratio quadrupla ſupertripartiens ſeptimas, vel Ratio 31 ad 7, vel denique Ratio $\frac{31}{7}$. Et ſic de cæteris.

Ad §. II. Proportio ſæpe in communi uſu, itemque apud Matheſeos Scriptores, idem denotat quod Ratio. Unde nonnullis placet, ut *Proportionalitas* potius quam Proportio diceretur Rationum ſimilitudo. Sed perinde eſt, utra Vox uſurpetur,

petur, modo Vocis usurpatæ eadem ubique apud eundem Scriptorem servetur significatio, ut evitetur ambiguitas. Definitio autem supra allata tam Rationis quam Proportionis desumitur ab *Euclidis* Elemento quinto, cujus & Theoremata utiliora fere omnia passim tradita sunt in hoc Capite XI. Certe cùm Liber iste totus spectet ad Proportionem, visum est heic loci exhibere ejusdem Theorematum omnium quandam Synopsin & Declarationem Algebraicam.

Synopsis & Declaratio Algebraica Euclidis Elem. 5ti.

Prop. 1. } 2. } 3 & 4. } 5. } Continetur & demonstratur universaliter in Prop. { 12. 24. 15. 19.

6. Referenda est ob cognatam Demonstrationem ad 24.

7. Si / 9. Erit $A = B$ Erit / Si α) $A = \alpha$) B. Et A) $\alpha = B$) α.

8. Si / 10. Erit $A \sqsubset B$ Erit / Si α) $A \sqsubset \alpha$) B. At B) $\alpha \sqsubset A$) α.

Nam Rationes ex Quotis æstimantur per §. I. C. XI.

11. Si α) $A = \beta$) $B = \gamma$) C, Erit α) $A = \gamma$) C.

13. Si α) $A = \beta$) $B \sqsubset \gamma$) C, Erit α) $A \sqsubset \gamma$) C.

Nam Rationes ex Quotis æstimantur per §. I. C. XI.

NB. Quod in Prop. quatuor proxime antecedentibus ostenditur de Majoritate Rationis, idem ostendi potest simili argumentatione de Minoritate, mutatis mutandis. Puta Si $A \sqsupset B$, Erit α) $A \sqsupset \alpha$) B. At B) $\alpha \sqsupset A$) α. Et sic in cæteris.

12. Continetur & declaratur supra in §. VII. Cap. XI.

14. Proposítis $A : \alpha :: B : \beta$. Si $A \sqsubset = \sqsupset B$, Erit $\alpha \sqsubset = \sqsupset \beta$. Nam $A \beta = \alpha B$ per §. IV. Cap. XI.

15. Continetur & declaratur in §. III. Cap. XI.

16, 17, 18, & Coroll. Prop. 19. continentur & declarantur supra in §. VI. Cap. XI.

19. $A . B :: A - \alpha : B - \beta$. Sequitur ex Coroll. Prop. 19. supra in §. VI. permutando sive alterne.

Prop. 20 & 21. sunt Lemmata ad duas sequentes demonstrandas, quas cùm sine earum ope demonstrare liceat, non est cur heic exponerentur.

Prop.

Prop. 22. Si $A:B::\alpha:\beta$ / $B:C::\beta:\gamma$ Erit ex æquo Ordinate. Nam $A:\alpha::B:\beta::C:\gamma$ Vel $A:C::\alpha:\gamma$.

23. $A:B::\beta:\gamma$ / $B:C::\alpha:\beta$ Erit Perturbate. Nam $A\gamma=B\beta=C\alpha$

24. Si $A:B::\alpha:\beta$ / $C:B::\gamma:\beta$ Erit $A\pm C:B::\alpha\pm\gamma:\beta$.

Nam Invertendo $B:C::\beta:\gamma$. Ergo ex æquo $A:C::\alpha:\gamma$. Ergo Componendo vel Dividendo $A\pm C:C::\alpha\pm\gamma:\gamma$. Et ex Hypothesi $C:B::\gamma:\beta$. Ergo ex æquo $A\pm C:B::\alpha\pm\gamma:\beta$.

25. Propositis $A.\alpha::B:\beta$, si A sit Quantitas maxima, erit β minima; & $A+B\sqsubset B+\alpha$. Nam Convertendo $A.A-\alpha::B:B-\beta$. Ergo ex Hypothesi quod $A\sqsubset B$ & per 14. 5. erit $A-\alpha\sqsubset B-\beta$. Ergo transponendo $A+\beta\sqsubset B+\alpha$.

NB. 1. Quæ subjungi solent Propositiones, non sunt *Euclideæ* (sed ex *Clavio* aliisq; desumptæ) ideoque heic omissæ.

2. Ex ipsis Propositionibus præmissis facile confici queunt Definitiones (in El. 5.) Rationis Alternæ, Inversæ, &c. Puta, Alterna Ratio est sumptio Antecedentis ad Antecedentem, & Consequentis ad Consequentem. Def. 12. *Eucl.* El. 5. Et sic de cæteris.

3. Heic videtur non reticendum, quod *homologæ*, seu similes Ratione dicuntur Antecedentes quidem Antecedentibus, Consequentes vero Consequentibus. Ut si $A:\alpha::B:\beta$, tam A & B quam α & β dicuntur Homologæ.

Ad §. V. Regulæ Aureæ Praxis potest pluribus modis variari. Nam patet Terminum quartum quæsitum $\frac{CB}{A}=\frac{B}{A}\times C=\frac{C}{A}\times B$. Item in Numeris $\frac{4\times 9}{3}=\frac{9}{3}\times 4=\frac{4}{3}\times 9$.

Ibid. 1. Quia in Regula Aurea simplici Terminus primus semper esse debet homogeneus sive homonymus tertio, idcirco sæpius opus erit *Reductione* quæ supra tradita est §. I. Cap. X. Ex. gr. Si proponatur hujusmodi Quæstio: Qui singulis Mensibus expendit 40 Solidos, quot Minas expendet singulis Annis. Priusquam institui possit Operatio, facta Reductione,

ductione, Termini ita ſunt exprimendi; viz. (non $1^m : 40^s ::$ $1^a : q^m$? ſed) $28^{dies} : 40^s :: 365^d : q^s$.

NB. Cavendum eſt, nequando fraudi ſit, indeque Error ſuboriatur, quod ea tanquam proportionalia habentur, quæ proportionalia non ſunt. Ex. gr. Si proponatur hujuſmodi Problema quaſi hac Regula ſolvendum; viz. Si vas 12 Congiorum capax, Aqua impleatur, atque aperto in fundo foramine, exeant in duobus Horæ minutis tres Congii: quanto tempore tota exibit Aqua? Reſpondendum eſt juxta Regulam Auream, totam Aquam exituram eſſe Minutis octo, quia $3 : 2 :: 12 : 8$. Atque hoc quidem verum eſſet, modo Aqua pergeret eadem velocitate exire, qua cœperat. At ſecus omnino ſe res habet. Siquidem continue decreſcit exeuntis Aquæ celeritas, & quo minus ſupereſt exhauriendum Aquæ, eo ſegnius exit. Majore nempe & violentia & velocitate effluet Aqua vaſe pleno, quam ſemipleno; quoniam Aqua inferius exitura majore mole ſuperioris Aquæ premitur.

REgulæ (uti dici ſolent) *Praxeos*, itemq; Regula *Societatis*, *Alligationis*, & *Falſi* ſeu *Falſæ Poſitionis* in Textu conſulto omiſſæ ſunt, quippe priores Artibus ingenuis vix inſerviunt; & quæ per ultimam ſolvi ſolent Quæſtiones, illæ quidem omnes, aliæque plures, magis concinne & perſpicue ſolvi poſſunt per Regulam Algebræ ſive Æquationes Specioſas. Nihilominus in gratiam eorum, qui Regulas prædictas ſcire velint, viſum eſt eaſdem hoc loco adjungere. Quare

Primo, quoties Regula Aurea Directa pro Termino *primo* habet *Unitatem*, peculiari nomine vocitatur *Regula Praxeos*, vel quia ejuſmodi Quæſtiones in communi Praxi frequentius occurrunt, vel quia Praxi expediendæ aptiores ſunt. Nam

1. Patet in hoc caſu Diviſione non eſſe opus. Puta, ſi Ulna 1 conſtet Solidis 5, Ulnæ 3 conſtabunt Solidis 15, h. e.

$1 : 5 :: 3 : \left(\frac{3 \times 5}{1} =\right) 3 \times 5$ ſive 15.

2. Si pretium Rei venalis ſit Pars *Aliquota* ſive Minæ ſive Solidi, multo adhuc facilior fiet Praxis. Nempe Terminus tertius, diviſus per Numerum illum qui denominat Partem Aliquotam, exhibebit Terminum quæſitum, qui ejuſdem erit Denominationis, ac Pars Aliquota. Ex. gr. Quæritur, quanti conſtabunt Ulnæ 352, ſi Ulna 1 conſtet 6^d? ſeu $1^u : 6^d :: 352^u : q$. Quia $6^d = \frac{1}{2}$ Sol. erit $q = \frac{352}{2}{}^u = 176^s$. h. e.

h. e. 8 l. 16 s. (Nempe $\frac{6\,d \times 352}{12\,d} = \frac{\frac{1}{2}\,s \times 352}{1\,s} = \frac{1}{2}\,s \times \frac{352}{1} = \frac{352}{2}\,s.$)

Item 1 u : 3 d :: 174 u : q s. Quia $3\,d = \frac{1}{4}\,s$, erit $q = \frac{174}{4} = 18\frac{1}{2}\,s.$ h. e. 18 s. 6 d. (Nempe $\frac{3\,d \times 74}{12\,d} = \frac{\frac{1}{4}\,s \times 74}{1\,s} = \frac{1}{4}\,s \times \frac{74}{1} = \frac{74}{4}\,s.$ Et par est ubique Ratio Praxeos.) Similiter si Ulna constet 10 s, quanti constabunt 134 Ulnæ? hoc est, 1 u : 10 s :: 134 u : q s? Quia $10\,s = \frac{1}{2}$ Minæ, erit $q = \frac{134}{2} = 67$ l. Item 1 u : 4 s :: 89 u : q s. Quia $4\,s = \frac{1}{5}$ Minæ, erit $q = \frac{89}{5} = 17\frac{4}{5}$ l, hoc est, 17 l. 16 s.

3. Si pretium Rei venalis sit Pars *Aliquanta* Minæ vel Solidi, resolvenda est in Aliquotas eam componentes juxta Tabulam sequentem, & pro harum numero Praxis est iteranda. Ex. gr. 1 u : 10 d :: 133 u : q s. Quia 10 d fit ex Partibus Aliquotis Solidi 6 d & 4 d, erit $q = \frac{133}{2}$ (= 66 s. 6 d.) + $\frac{133}{3}$ (= 44 s. 4 d.) = 110 s. 10 d, h. e. 5 l. 10 s. 10 d. Similiter 1 u : 9 s :: 36 u : q s. Quia 9 s fit ex Partibus Aliquotis Minæ 5 s & 4 s, erit $q = \frac{36}{4}$ (= 9 l) + $\frac{36}{5}$ (= 7 l. 4 s) = 16 l. 4 s.

4. Tabula exhibens Partes Aliquotas necnon Aliquantas Minæ Anglicanæ, itemque Solidi, &c.

Partes Aliquotæ *Minæ Anglic.*			P. Aliquantæ *M. Ang. in* P. Aliquot. *resol.*			
s.	d.	l.	s.	s.	s.	s.
10 .	00	= $\frac{1}{2}$	19	= 10	+ 5	+ 4
6 .	08	= $\frac{1}{3}$	18	= 10	+ 4	+ 4
5 .	00	= $\frac{1}{4}$	17	= 10	+ 5	+ 2
4 .	00	= $\frac{1}{5}$	16	= 10	+ 4	+ 2
3 .	04	= $\frac{1}{6}$	15	= 10	+ 5	
2 .	06	= $\frac{1}{8}$	14	= 10	+ 4	
2 .	00	= $\frac{1}{10}$	13	= 5	+ 4	+ 4
1 .	08	= $\frac{1}{12}$	12	= 10	+ 2	
1 .	03	= $\frac{1}{16}$	11	= 5	+ 4	+ 2
1 .	00	= $\frac{1}{20}$	9	= 5	+ 4	
0 .	10	= $\frac{1}{24}$	8	= 4	+ 4	
0 .	08	= $\frac{1}{30}$	7	= 5	+ 2	
0 .	06	= $\frac{1}{40}$	6	= 4	+ 2	
			3	= 2	+ 1	

Partes Aliquotæ Solidi.		*Partes Aliquantæ Solidi, &c.*			
d	s	d	d	d	d
6	= 1/2	11	= 6	+ 3	+ 2
4	= 1/3	10	= 6	+ 4	
3	= 1/4	9	= 6	+ 3	
2	= 1/6	8	= 4	+ 4	
1	= 1/12	7	= 4	+ 3	
9	= 1/8	5	= 3	+ 2	
2	= 1/24				
1	= 1/48				

Secundo, Quoties data in duobus Terminis Ratione, & tertio loco Terminus quotlibet (prout res ferat) positis, totidem quæruntur quarti proportionales; patet Regulam Auream toties esse repetendam, quot in hoc Casu peculiari nomine dici solet *Regula Societatis*, quippe hujusmodi Quæstiones sæpius occurrunt solvendæ in Mercatorum Consortiis. Ex. gr. Tres Mercatores, inita societate, contulerunt sua Symbola; primus 60 l, secundus 50 l, tertius 40 l. Summa Symbolorum = 150 l. Lucrum commune negotiando conquisitum = 30 l. Quæritur quantum inde cuique debeatur, sive Lucrum singulorum.

Summ. Symb.	*Lucr. com.*	*Symb. sing.*	*Lucr. sing.*
		60	12
150	: 30 ::	50	10
		40	8
		150	= 30.

Et quemadmodum Regula Societatis (*sine Tempore*, seu vulgo) *Simplex* absolvitur repetitione Regulæ Aureæ Simplicis, nempe Directæ; sic Regula Societatis (*cum Tempore*, seu vulgo) *Composita* absolvitur repetitione Regulæ Aureæ Compositæ, nempe Directæ. Ex. gr. Tres Mercatores lucrati sunt 9000 l. Primus contulit 100 l per menses 16, secundus 140 l per menses 10, tertius 300 l per menses 7. Quantum lucri singulis debetur?

Summ. Symb. x *Summ. Temp.*		*Lucr. com.*	*Symb. sing.* x *T. sing.*	*Lucr. sing.*
			100 x 16	: 3200
540 x 33	::	9000	: 140 x 10	: 1600
			300 x 7	: 4200
			540 x 33	: 9000.

NB. Ratio

NB. Ratio Praxeos in Regula Societatis Simplici omnino eadem eſt, ac in Reg. Aurea Simplici, nempe Directa; itemque eadem in Regula Societatis Compoſita, ac in Reg. Aurea Compoſita, nempe Directa; adeoque Explicatione utriuſvis non eſt opus.

Tertio, Regula *Alligationis* (ita dicta à Ligaturis quibus inter operandum uti ſolent Arithmetici Practici, ut ſtatim apparebit) perficitur etiam ope potiſſimum Regulæ Aureæ, atque adeo heic loci tractatur. Eſt autem duplex: Nam datis ſingularum Rerum venalium Pretiis diverſis unà

cum { Portionibus particularibus / Pretio communi } aſſignat { Pretium commune. / Portiones particulares.

Utriuſque Regulæ Praxis ab Exemplis appoſitis petenda eſt.

Caſ. 1. Sint duo genera Argenti non puri. Uncia unius valeat 5 s, alterius 4 s. Colliqueſiant 4 Unciæ illius, & 8 hujus. Quantum valebit Uncia Mixti? Erit ut Quantitas utriuſque Argenti invicem commiſcendi ad Pretium ſuum, ita Quantitas Mixti ad Pretium ſuum. Viz.

4+8 u : 5 s x 4 pl. 4 s x 8 : : (h.e. 12 u : 52 s : :) 1 u : $4\frac{4}{12}$ i.e. 4 s 4 d.

Caſ. 2. Contra ſcire velim, quantum ex utroque Argento prædicto ſumere debeam, ut extet Libra Mixti, cujus Unciæ ſingulæ valeant 4 s. 4 d. Pretia utriuſque Argenti propria *alligentur* inter ſe, hoc eſt, comparentur cum Pretio communi ſive Medio Mixti (viz. 4 s. 4 d.) ut habeantur Differentiæ, nimirum Exceſſus (8 d) Pretii majoris (5 s) ſupra medium, minori ad dextram adſcribendus, & Defectus (4 d) minoris (4 s) infra medium, majori ad dextram pariter adſcribendus. Erit deinde ut Summa Differentiarum ad Quantitatem Mixti aſſignatam, ita Differentia quælibet particularis ad Portionem particularem miſcendam iſtius Argenti, cui adſtat Differentia. Viz.

Pret. med.	*Pret. prop.*	*Diff.*	
4 s. 4 d.	5 s	4 d	Summ. Diff. 12 d. Quare
	4 s	8 d	

Summ. Diff.	*Mixti Libra.*	*Diff. ſing.*	*Arg. miſcend.*	
12	: 1 : :	4	: $\frac{4}{12}$	l. ſive 4 Unc. Arg. purior.
		8	: $\frac{8}{12}$	l. ſive 8 Unc. Arg. vilior.

NB. Idem eſt Operandi modus, ſi plura quam duo dentur Pretia, his ubique Legibus obſervatis. 1. Quæ alligantur

Pretia, eorum utrumque neque majus sit neque minus Pretio Communi, quod ideirco nonnullis dicitur Pretium *Medium*. Quare ubi Pretia singula sunt Pretio Communi majora, assignanda est Cifra tanquam Pretium aliquod singulare. 2. Excessus Pretii majoris supra Medium adscribatur Pretio minori: Defectus autem Minoris infra Medium, majori. 3. His salvis, perinde est quoquo ordine inter se Pretia singula alligantur. Et potest unum alligari sæpius (i. e. cum diversis) modo unumquodque saltem alligetur semel. Unde fit, ut eadem Quæstio varias admittat Solutiones. Ex. gr. Esto

Pr. med.	*Pr. sing.*	*Diff.*		*Pr. sing.*	*Diff.*		*Pr. sing.*	*Diff.*
7	3	3		3	1		3	1 · 3 = 4
	4	1	Vel	4	3	Vel	4	1 · 3 = 4
	8	3		8	4		8	4 · 3 = 7
	10	4		10	3		10	4 · 3 = 7

Ratio Praxeos satis patebit, operando per Species Algebricas, uti fit *Tacqueti* Arithm. Pract. L. 4. C. 4. Huc refer Cap. 58. Algebræ *Wallisianæ*.

Quarto, Regula *Falsi* sive Falsæ Positionis docet ex Numero *falso* Verum quæsitum elicere, ope pariter Regulæ Aureæ. Est autem duplex, Positionis nempe Simplicis vel Duplicis.

1. Regula Positionis Simplicis sic se habet. Pro Numero quæsito *ponatur* quivis (adeoque *falsus*) Numerus, *Hypothesis* inde dictus, atque is tractetur juxta tenorem Quæstionis. Numerus ita inventus, si Quæstioni non satisfaciat, constituet Terminum primum in Regula Aurea, Hypothesis secundum, Numerus in Quæstione datus tertium, quartus proportionalis solvet Quæstionem. Ex. gr. Hostilis exercitus tertia pars cæsa est, pars quarta capta, 1000 fugerunt. Quot ergo fuere universi hostes, atque adeo quot cæsi, quot capti? Ponatur numerus totius exercitus 12. Igitur cæsi sunt 4, capti 3, & supersunt 5 qui fugerunt. Deberent autem fuisse 1000. Quare

N. inventus	*Hyp.*	*N. dat.*	*Quæsit.*
5 :	12 ::	1000 :	2400.

Est enim numeri 2400 pars tertia 800, pars quarta 600, & supersunt 1000 fugitivi. Nempe 800 + 600 + 1000 = 2400.

2. Re-

2. Regula Positionis Duplicis ita dicitur, quia pro Numero quæsito ponitur primo unus quivis Numerus, & deinde (cùm prior ille Quæstioni non satisfaciat) Numerus quivis alius; atque adeo est duplex Hypothesis, & ex utraque Numerus quæsitus elicitur, hunc ad modum:

Regulæ Aureæ Terminum primum constituat Differentia Errorum, si similes hi fuerint; Summa, si dissimiles. Terminum secundum, Differentia Hypothesium. Tertium, Error alteruter. Quartus proportionalis inventus Hypothesi illi, ex qua Error Terminum tertium constituens profluxit, addendus est, si Error iste sit deficiens sive —; subtrahendus, si excedens seu +; atque ita habebitur Numerus quæsitus. Ex. gr. Proponantur 100 dividendæ inter A, B, & C, ea lege, ut B habeat triplum ad A; C, quantum & A & B. Qr pars singulorum.

Hyp. prima. A 12. + B 36. + C 48 = 96. Error 1us — 4.
secunda. A 13. + B 39. + C 52 = 104. Error 2us + 4.

Summ. Error. *Diff. Hyp.* *Err.*
8 : 1 :: ∓ 4 : $\frac{1}{8}$ sive $\frac{1}{2}$. Quare

A 12 + $\frac{1}{2}$ sive 13 — $\frac{1}{2}$. B 37 $\frac{1}{2}$. C 50. = 100. N. dat.

Est & alter modus Operandi, juxta hanc Regulam. Utraque Hypothesis in alternum Errorem ducatur, & si Errores sint similes, Productorum Differentia dividatur per Differentiam Errorum; sin dissimiles, eorum Summa per horum Summam: Quotus exhibebit Numerum quæsitum.

Resumatur v. g. Exemplum proxime præcedens.

Hyp. 1. 12 x Err. 2us + 4 = 48. Sum. Product. 100 / 8 (12 $\frac{1}{2}$ N. q.
2. 13 x Err. 1us — 4 = 52. Summ. Error.

NB. Ex præscripto Regulæ sive Simplicis sive Duplicis Positionis operatus, si Quæsitum non obtineas; neque per alias quascunque Hypotheses aut ope utriusvis Regulæ obtinebis. Cæterum tradit *Tacquetus* varia indicia, ex quibus colligantur utrum Quæstio proposita Positione Simplici aut Duplici solvi queat, aut demum sub neutram Regulam cadat. Indicia illa siquis scire velit, itemque Demonstrationem Praxeos, consulat eundem *Tacquetum* Arithm. Pract. L. 4. C. 5. Est etiam modus posterior Praxeos supra traditus, ab *Oughtredo* in Opusculis ad calcem Clav. Mathemat. demonstratus, quem etiam consulat Lector. Nam plura heic adjicere non visum

visum est de Regula adeo manca, & quæ sine ullo Arithmeticæ dispendio abesse potest, cùm ejusdem locum plusquam suppleat Æquationis Speciosæ Regula, ad quam itaque properandum est.

Ad §. VI. Sunt alii plurimi de Proportionalibus Argumentandi modi à Mathematicis usurpati, præter illos supra traditos; quos vide in Cl. *Wallisii* Algebr. Cap. 19.

Cum certum sit, Analogias non raro institui inter Quantitates heterogeneas, puta ut linea A ad lineam B; sic pondus α ad pondus β: quærendum videtur quî possit una per alteram multiplicari aut dividi? seu quid sit, v. g. pondus α per lineam B multiplicare, aut per lineam A dividere? Qualis scilicet Factus ille erit, qui prodit ex linea in pondus ducta? aut qualis Quotus, ubi quæritur quoties pondus α contineat lineam A?

Dicendum est itaque (cum *Wallisio* Op. Arithm. Cap. 37.) in hoc Casu non tam comparari lineam ad pondus, quæ quidem sunt plane heterogenea, nec invicem comparanda; sed Rationem duarum inter se linearum ad Rationem duorum invicem ponderum. Quæ quidem Rationes invicem homogeneæ sunt, puta dupla vel tripla, &c. Adeoque quum dicitur $A : B :: \alpha : \beta$, hoc tantum innuitur, Rationem A ad B æqualem esse Rationi α ad β, sive $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$. Puta, si A sit linea bipedalis, B pedalis; erit illa hujus dupla, sive ut 2 ad 1. Item, si α sit quadripondium, β bipondium; erit illud hujus duplum, sive ut 2 ad 1. Quippe erit tum B) A (2, tum β) α (2.

Cum itaque nihil aliud heic spectetur, quam Ratio sive Quotus, licebit pro expositis Quantitatibus, alias cujuscunque generis substituere, in eadem Ratione constitutas; utut expositis sint heterogeneæ. Arithmeticus itaque, quo Operationes suæ rectius constent, pro expositis Quantitatibus cujuscunque generis, quarum tantum Ratio consideratur, Numeros substituit (sive quod instar Numeri est) in eadem Ratione constitutos: puta pro lineis A, B, bipedali & pedali, binos quosvis in eadem Ratione Numeros, puta 2 & 1, vel 4 & 2, &c. Nec tam Lineas & Pondera, quam Numeros in iisdem Rationibus constitutos, se versare cogitat. Itaque in exemplo exposito, si A, B, supponantur significare 4, 2; (quia nempe $\frac{A}{B} = \frac{4}{2}$,) manentibus interim si placet α & β ut Ponderum Symbolis:

Symbolis: tantundem erit dicere $A : B :: \alpha : \beta$, atque $4 : 2 :: \alpha : \beta$. Adeoque ſecundi & tertii Terminorum Rectangulum $B \times \alpha$ eſt $2 \times \alpha$, ſive ponderis α duplum: & $\frac{B \times \alpha}{A}$ eſt $\frac{2 \times \alpha}{4}$, ſive iſtius dupli quadrans. At vero Pondus duplare, iterumq; quadrifariam partiri, nihil abſurdi ſonat.

Ad §. XII. Problematum circa Progreſſionem Arithmeticam ſolutio exhibetur ab *Oughtredo* Clav. Math. Cap. 19. Probl. 6. item à *Walliſio* in Op. Arithm. Cap. 28.

Problematum circa Progreſſionem Geometricam ſolutio à *Walliſio* exhibetur in Op. Arithm. Cap. 34.

Ad §. XV. Patet Poteſtates omnes eſſe Terminos Progreſſionis Geometricæ ab Unitate inchoatæ. Ex. gr.

T. 1us	2us	3us	4us		T. 1us	2us	3us	4us
N. R ſeu L.	Q.	C.			N. R ſeu L.	Q.	C.	
1 . 2 .	4 .	8	&c. h.e.		1 . 1×2 .	2×2 .	4×2	
1 . 3 .	9 .	27			1 . 1×3 .	3×3 .	9×3	
1 . 4 .	16 .	64			1 . 1×4 .	4×4 .	16×4	&c.

Patet etiam Terminum ſecundum hujuſmodi Progreſſionis ſemper æqualem eſſe Rationi. Et hinc, quia data Ratione datur etiam Terminus ſecundus, negligi ſolet in Geneſi Poteſtatum Terminus primus ſive Unitas, & Terminus ſecundus ubique habetur pro Radice Poteſtatum ſive Terminorum ſubſequentium. Quare cùm non ſit, cur Term. Secundus Progreſſionis nomine Poteſtatis haud æque inſigniretur, ac Tertius, aut alius quivis; patet Radicem vulgo dictam in numero Poteſtatum reponendam eſſe. Hujuſmodi autem eſſe naturalem ortum Poteſtatum, ex eo colligi poteſt, quod Ratio ſimplex, duplicata, triplicata, &c. idem ſonet apud *Euclidem*, quod apud hodiernos Scriptores Radix ſeu Latus, Quadratum, Cubus, &c. Ubi notandum obiter eſt diſcrimen inter Rationem duplicatam, triplicatam, (&c.) & Rationem duplam, triplam, (&c.) nimirum Rationes poſteriores ſunt, ut 2, 3, &c. ad 1; priores, ut 2, 4, 8 ad 1, vel 3, 9, 27 ad 1, & univerſim ut a, a^2, a^3, &c. ad 1. Hoc eſt, 2 ad 1 eſt Ratio dupla, 4 ad 1 eſt Ratio dupla duplicata ſive 2×2, 8 ad 1 eſt Ratio dupla triplicata ſive $2 \times 2 \times 2$. Item 3 ad 1 eſt Ratio tripla, 9 ad 1 eſt Ratio tripla duplicata ſive 3×3, 27 ad 1 eſt Ratio tripla triplicata ſive $3 \times 3 \times 3$. Et ſic in cæteris.

Omnes

Omnes Poteſtatis (cujuſque ordinis) intermediæ ſpecies, ſunt etiam Poteſtates Mediorum inter A & E proportionalium; ſcilicet inter Ac & Ec ſunt duæ Mediæ proportionales, AqE & AEq, qui etiam Cubi ſunt ex duobus Mediis inter A & E proportionalibus, puta ex M & N. Quare A, √cAqE, √cAEq, E ÷ ; nempe A, M, N, E. Nam AqE = AMN = Mc; & AEq = MNE = Nc. (Ex. gr. A, M, N, E, deſignent 2, 4, 8, 16, erit 2×2×16 = 2×4×8 = 4×4×4 nempe 64. Item 2×16×16 = 4×8×16 = 16×16×16, nempe 512.) Atque hinc patet Inventio quotlibet Mediorum proportionalium inter A & E, ſive duas quaſvis Quantitates datas: Ut ſi velis *quinque* Medios proportionales, formetur ex A & E Poteſtas [6] ſive cc, cujus ſcilicet Index Unitate excedit numerum quæſitorum Mediorum: Eruntq; A, √ccAqcE, √ccAqqEq, √ccAcEc, √ccAqEqq, √ccAEqc, E, ÷.

Ad Progreſſionem quodammodo ſpectat methodus inveniendi varias omnes Rerum quarumvis, puta Literarum, *Tranſpoſitiones* pro datarum Numero aſſignato. Nempe Productus ortus ex continua Multiplicatione ab Unitate ad Numerum uſque aſſignatum indicat, quot vicibus Res datæ tranſponi poſſint. Puta Literæ 6 tranſponi poſſunt vicibus 720. Nam 1×2×3×4×5×6 = 720. Pari artificio conſtabit Literas 24 invicem tranſponi poſſe vicibus

620448401733239439360000.

Qui Numerus adeo grandis eſt, ut mille milliones Scriptorum, mille Annorum millionibus, nequeant ſcribere omnes Literarum 24 permutationes, licet ſinguli quotidie abſolverent 40 paginas, quarum unaquæque contineret 40 diverſos Literarum 24 ordines; quod oſtendit *Tacquet*. Arithm. Pract. L. 5. C. 8. Sed de his vide plura in Cl. *Walliſii* Tractatu de Combinationibus, Alternationibus, &c. Vol. 2. Op. Math.

Præter Proportionem Geometricam & Arithmeticam eſt etiam tertia, quæ dici ſolet *Harmonica* ſive *Muſica*, de qua conſule *Clav. Math.* Cap. 6. §. 25. & Scriptores Muſicos.

CAP.

CAP. XII.

De Æquatione, & de Quæstionibus per Æquationem solvendis; sive de Regula Algebræ.

I. QUotiescunque Problema aliquod, sive Quæstio, proponitur; cogita præstitum esse quod postulatur. Adeoque pro Quantitate *quæsita* (ac si jam nota esset) ponatur *a*, vel alia aliqua *Vocalis*; pro Quantitatibus autem *datis*, *Consonantes*; nempe ut Quantitates notæ ab ignotis facilius distinguantur. Quare alia quavis methodo uti licet, modò semper teneatur, quænam Literæ designent Quantitates notas, quænam ignotas.

II. Deindè Quantitates, tam datæ quam quæsitæ, secundùm conditionem Quæstioni convenientem efformentur, aptaque adhibita Ratiocinatione invicem comparentur, addendo, subtrahendo, multiplicando & dividendo; donec tandem aliquid inveniatur Quantitati quæsitæ, aut ejusce Potestati alicui, æquale.

III. Et quia in omni fere Æquatione, ubi primò ex involucris Quæstionis effulget, Quantitates notæ cum ignotis confunduntur; ope Reductionis (Cap. X. §. XVI. traditæ) elaborandum est Terminos Æquationis ita ordinare, ut Quantitates datæ sive notæ constituant unam Æquationis partem; quæsitæ sive ignotæ, alteram. In Terminis autem sic ordinandis, possunt hoc ordine adhiberi variæ species Reductionis:

1. Si Quantitas quæsita vel aliqua ejus Potestas sit in Fractione, fiat (per Cap. X. §. XVI. 3.) Æquationis istius Reductio ad Æquationem aliam solis Integris

gris exprimendam, Sic v. g. $\frac{aa}{4}+6=15$ fiet $aa+24=60$, seu $\frac{aa}{b}+c=d$ fiet $aa+bc=bd$.

2. Si Quantitates datæ immiſceantur cum Quæſitis, fiat (per Cap. X. §. XVI. 1. & 2.) Tranſpoſitio Quantitatum ſub Signis contrariis, donec Quantitates omnes ignotæ ſive quæſitæ occupent Æquationis partem unam. Sic $aa+24=60$ fiet $aa=60-24$, ſeu $aa+bc=bd$ fiet $aa=bd-bc$.

3. Si contingat omnes datas Quantitates duci in Gradum ſive Poteſtatem aliquam Quantitatis quæſitæ, fiat (juxta Cap. X. §. XVI. 4.) Terminorum omnium per infimam Poteſtatem diviſorum communis Depreſſio. Sic $aaa=3aa$ fiet $a=3$, nempe dividendo utrinque per aa.

4. Si Poteſtas altiſſima Quantitatis quæſitæ ducatur in Quantitatem aliquam datam, fiat (juxta Cap. X. §. XVI. 4.) Terminorum omnium per Quantitatem illam datam Diviſio. Sic $3aa+9a=24$ fiet $aa+3a=8$, nempe dividendo utrinque per 3; ſeu $baa+bba=d$ fiet $aa+ba=\frac{d}{b}$, nempe dividendo utrinque per b.

5. Si Quantitas aliqua ſit Latus Surdum, fiat (per Cap. X. §. XVI. 5.) Æquationis Reductio ad aliam ſolis Quantitatibus Rationalibus exprimendam. Sic $\sqrt{a}=3$ fiet (quadrando utrumq; Terminum) $a=9$; ſeu $\sqrt{a}=b$ fiet $a=bb$.

6. Ultimo, ſi prodeat tandem Æquatio inter ſolam Poteſtatem aliquam Quantitatis quæſitæ ex parte una, & Quantitates (unam aut plures) datas ex parte altera, fiat utrinque (juxta Cap. X. §. XVI. 6.) æqualis

æqualis Evolutio. Sic $\frac{6aa}{5}+8=128$ fiet (primo transponendo, $\frac{6aa}{5}=120$; deinde tollendo Fractionem, $6aa=600$; tertio dividendo utrinque per 6, $aa=100$; denique per æqualem Evolutionem, nempe Radicis Quadraticæ) $a=10$. Seu $\frac{baa}{c}+d=f$ fiet (primo $\frac{baa}{c}=f-d$, deinde $baa=fc-dc$, tertio $aa=\frac{fc-dc}{b}$, denique) $a=\sqrt{:\frac{fc-dc}{b}}$.

7. Ut quæ hactenus tradita sunt, perspicua fiant; visum est heic loci proponere Quæstionem solutu facilem, & quæ non diversa est ab Exemplo illo, quod in Notis ad Cap. XI. §. V. ubi de Regula Falsi agebatur, jam ante adhibitum est; ut inde obiter constet, quanto Regula Algebræ Regulam Falsi cùm facilitate tum perspicuitate Praxeos antecellat.

Proponatur v. g. Summa 100 l. dividenda in tres Partes, quarum una erit tripla ad alteram, & tertia æquabit priores duas. Quænam erunt tres illæ Partes? Partem minimam quasi jam notam designet a, & Z designet Summam datam. Quare (partis a triplum sive) pars media erit $3a$, & (utriusque Aggregatum sive) pars maxima erit $4a$. Quantitatibus tam datis quàm quæsitis secundùm Quæstionis exigentiam sic efformatis, patet apte ratiocinando (viz. quia omne Totum æquatur omnibus suis Partibus simul sumptis, idcirco) $Z=a+3a+4a=8a$. Et quia in Æquatione inventa, Quantitas nota 8 ducatur in Quantitatem ignotam a, idcirco per §. III. 4. Cap. hu-

jus 8)Z = *a*. Atque ita ſolvitur Problema: Nempe quia nota eſt Quantitas 8)Z, unà innoteſcet etiam æqualis Quantitas, viz. *a*. Scilicet *a* = 8)Z i. e. 8)100 = $12\frac{1}{2}$. Adeóque $3a = 37\frac{1}{2}$, $4a = 50$. Et $12\frac{1}{2} + 37\frac{1}{2} + 50 = 100$. Q. E. I.

IV. Quoties per præmiſſas Reductionis ſpecies Æquationis Termini ita ordinari poſſunt, ut ex una parte Quantitates datæ, ex altera quæſitæ, ſint puræ ſive aliæ aliis non complicatæ; iſtiuſmodi Æquatio inde dici ſolet *Pura* ſive *Simplex*. Sunt autem Æquationes, quas utcunque torquebis, nihilominus ex parte una Quantitates quæſitæ manebunt datis affectæ ſive immixtæ, unde Æquationes *Affectæ* ſive *Mixtæ* dici ſolent; ut $aa + ba = d$, $aaa + ca = f$. Ubi nota, Quantitates datas quæſitis immixtas vocari *Coefficientes* ſive *Cofactores*.

V. Æquationes Affectæ ſunt totidem, quot ſunt ordines Poteſtatum; putà, Quadraticæ, Cubicæ, &c. Nempe Æquatio Affecta denominationem ſumit ab illa denominatione *Poteſtativa*, quam ſortitur Quantitatis quæſitæ Gradus maximus ad minimum (tanquam Radicem) comparatus. Puta $ba - aa = d$ dicitur Æquatio Affecta Quadratica; $aaa - ba = d$, Cubica, (&c.) quia illic aa eſt Quadratum ipſius *a*; heic, aaa Cubus ipſius *a*.

VI. Æquationum Affectarum Quadraticarum tres recenſentur Formulæ, puta $aa + ba = d$, $aa - ba = d$, $ba - aa = d$. In Formula prima, $aa + ba$ concipi poſſunt tanquam duo Membra Quadrati à Radice $a + \frac{1}{2}b$. Nempe quemadmodum $aa + 2ba + bb$ eſt Quadratum à Radice $a + b$, ſic $aa + ba + \frac{1}{4}bb$ eſt Quadratum à Radice $a + \frac{1}{2}b$. Similiter in Formula ſecunda, $aa - ba$ concipi poſſunt tanquam duo Membra Quadrati à Radice $a - \frac{1}{2}b$. In Formula quidem tertia, $ba - aa$ non conſtituunt duo Membra Quadrati

drati cujuſvis, poſſunt autem converti in $aa - ba$, (duo Membra, uti jam oſtenſum eſt, Quadrati à Radice $a - \frac{1}{2}b$,) nempe tranſponendo Terminos ſingulos, $ba - aa = d$ fit $aa - ba = -d$. Et hinc deducitur Solutio Æquationum Affectarum Quadraticarum, nempe *complendo* ſive *perficiendo Quadratum* mutilum (cujus Operationis Symbolum eſt $c\,\square$) in Æquatione data (explicite ſive implicite) adhibitum, per æqualem utrinque adjectionem Membri deſiderati; & deinde operando juxta Regulas §. III. Cap. hujus traditas, uti in Æquationibus Puris. Ex. gr.

1. Proponatur Æquatio Formulæ primæ, $aa + 6a = 55$, ſive in ſolis Speciebus (ſubſtituta nimirum b pro 6, & d pro 55) $aa + ba = d$. Ubi quæritur quis ſit Numerus per a deſignatis, qui & in ſe & in 6 ſive b ductus æquabit 55 ſive d.

Primo ex hypotheſi
$$\begin{cases} aa + ba = d \\ aa + 6a = 55 \end{cases}$$

Ergo $c\,\square$ ſive complendo Quadratum
$$\begin{cases} aa + ba + \frac{1}{4}bb = d + \frac{1}{4}bb \\ aa + 6a + 9 = 55 + 9, \text{ i.e. } 64 \end{cases}$$

Ergo $\sqrt{\ }$ ſive Evolvendo
$$\begin{cases} a + \frac{1}{2}b = \sqrt{d + \frac{1}{4}bb} \\ a + 3 = 8 \end{cases}$$

Ergo Tranſponendo
$$\begin{cases} a = \sqrt{d + \frac{1}{4}bb} : -\frac{1}{2}b \\ a = 8 - 3, \text{ i.e. } 5. \end{cases}$$ N. Q.

Nempe $aa + 6a = 25 + 30 = 55$. Q. E. I.

2. Proponatur Æquatio Formulæ ſecundæ, $aa - 10a = 24$, ſive in ſolis Speciebus $aa - ba = d$. Ubi quæritur quis ſit Numerus per a deſignatus, qui ex Quadrato ſuo decies ſubductus æquabit 24.

Primo

Primo ex hypotheſi $\begin{cases} aa - ba = d \\ aa - 10a = 24 \end{cases}$

Ergo $c\square$ $\begin{cases} aa - ba + \frac{1}{4}bb = d + \frac{1}{4}bb \\ aa - 10 + 25 = 24 + 25, \text{ i.e. } 49 \end{cases}$

Ergo ww $\begin{cases} a - \frac{1}{2}b = \sqrt{d + \frac{1}{4}bb} \\ a - 5 = 7 \end{cases}$

Ergo Tranſponendo $\begin{cases} a = \sqrt{d + \frac{1}{4}bb} : + \frac{1}{2}b \\ a = 7 + 5, \text{ i. e. } 12. \text{ N. Q.} \end{cases}$

Nempe $aa - 10a = 144 - 120 = 24$. Q. E. I.

3. Proponatur Æquatio Formulæ tertiæ, $10a - aa = 24$, ſive in ſolis Speciebus $ba - aa = d$. Ubi quæritur quis ſit Numerus per a deſignatus, qui in 10 ductus, & deinde Quadrato ſuo mulctatus, æquabit 24.

Primo ex hypotheſi $\begin{cases} ba - aa = d \\ 10a - aa = 24 \end{cases}$

Ergo Tranſponendo $\begin{cases} aa - ba = -d \\ aa - 10a = -24 \end{cases}$

Ergo $c\square$ $\begin{cases} aa - ba + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb - d \\ aa - 10a + 25 = 25 - 24, \text{ i.e. } 1 \end{cases}$

Ergo ww $\begin{cases} a - \frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{1}{4}bb - d} \\ a - 5 = 1 \end{cases}$

Ergo Tranſponendo $\begin{cases} a = \sqrt{\frac{1}{4}bb - d} : + \frac{1}{2}b \\ a = 1 + 5, \text{ i. e. } 6. \text{ N. Q.} \end{cases}$

Nempe $10a - aa = 60 - 36 = 24$. Q. E. I.

4. Quia Quadrati cujuſque duplex poteſt eſſe Radix, una ſcilicet Affirmativa, altera Negativa; hinc in unaquaq; Formula duplex eſt Valor Quantitatis a. E. g. Quia in Æquatione Form. 1ª, tam -8 quam $+8$ poteſt

poteſt eſſe Radix Quadrati 64, adeoque $a+3$ = tam -8, quam $+8$; idcirco $a=-8-3$, i. e. -11, non minus quam $a=8-3$, i. e. 5; (ſive in Speciebus, $a=-\sqrt{d+\frac{1}{4}bb}:-\frac{1}{2}b$, non minus quam $a=\sqrt{d+\frac{1}{4}bb}:-\frac{1}{2}b$.) Nempe ſi ponatur $a=-11$, erit $aa+ba=121(+)-66=55$. Similiter in Æquatione Form. 2ª, quia tam -7 quam $+7$ poteſt eſſe Radix Quadrati 49, adeoque tam $a-5=-7$, quam $a-5=7$; idcirco $a=-7+5$, i. e. 2, non minus quam $a=7+5$, i. e. 12; (ſive in Speciebus, $a=-\sqrt{d+\frac{1}{4}bb}:+\frac{1}{2}b$, non minus quam $a=\sqrt{d+\frac{1}{4}bb}:+\frac{1}{2}b$.) Nempe ſi ponatur $a=-2$, erit $aa-10a=4(-)-20=24$. Ultimo, quia in Æquatione Form. 3ª, tam -1 quam 1 poteſt eſſe Radix Quadrati 1, adeoque tam $a-5=-1$, quam $a-5=1$; idcirco $a=-1+5$, i. e. 4, non minus quam $a=1+5$, i. e. 6; (ſive in Speciebus $a=-\sqrt{\frac{1}{4}bb-d}:+\frac{1}{2}b$, non minus quam $a=\sqrt{\frac{1}{4}bb-d}:+\frac{1}{2}b$.) Nempe ſi ponatur $a=4$, erit $10a-aa=40-16=24$. Ubi obiter obſervandum eſt, in Formula prima & ſecunda unum valorem Quantitatis a eſſe Affirmativum, alterum Negativum; in tertia autem, utrumque Affirmativum.

5. Quare ex Solutione Æquationum trium præmiſſarum exurgunt Theoremata Solutionem Æquationis cujuſque Affectæ Quadraticæ edocentia. Viz.

Valor Affirm.

Theor. Form. 1. $a=\sqrt{d+\frac{1}{4}bb}:-\frac{1}{2}b$.

Theor. Form. 2. $a=\sqrt{d+\frac{1}{4}bb}:+\frac{1}{2}b$.

Theor. Form. 3. $a=\frac{1}{2}b\pm\sqrt{\frac{1}{4}bb-d}$.

6. Quæ jam dicta ſunt de Æquationibus Affectis proprie Quadraticis, accommodanda ſunt etiam nonnullis

nullis aliis Æquationibus, cujuſmodi ſunt $a^4 + ba^2 = d$, vel $a^6 - ba^3 = d$, &c; quæ minus proprie dicuntur Quadraticæ, quia a^4 concipi poteſt tanquam Quadratum ab a^2, item a^6 tanquam Quadratum ab a^3. Hinc ad Formulam primam referuntur, $aaaa + baa = d$, $a^6 + ba^3 = d$, $a^8 + ba^4 = d$, &c. Ad Formulam ſecundam, $a^4 - ba^2 = d$, $a^6 - ba^3 = d$, $a^8 - ba^4 = d$, &c. Ad Formulam tertiam, $ba^2 - a^4 = d$, $ba^3 - a^6 = d$, $ba^4 - a^8 = d$.

Proponatur v. g. Æquatio, $aaaa + baa = d$. Erit Radix (uti dici ſolet) *Plana* ſive $aa = \sqrt{d + \frac{1}{4}bb} - \frac{1}{2}b$. Et proinde $a = \sqrt{:\sqrt{d + \frac{1}{4}bb} - \frac{1}{2}b}$.

Proponatur item Æquatio $a^6 - ba^3 = d$. Erit Radix (uti dici ſolet) *Solida* ſive $aaa = \frac{1}{2}b + \sqrt{d + \frac{1}{4}bb}$. Et proinde $a = \sqrt[3]{:\frac{1}{2}b + \sqrt{d + \frac{1}{4}bb}}$.

Denique proponatur Æquatio, $ba^4 - a^8 = d$. Erit Radix (uti dici ſolet) *Biquadratica* ſive $a^4 = \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - d}$. Et proinde $a = \sqrt[4]{:\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - d}}$.

7. Problemata Æquationes Affectas Quadraticas producentia:

Probl. I. Sint 969 (ſive d) Milites in Aciem oblongam conſtituendi, ita ut Differentia laterum majoris & minoris (ſive longitudinis & latitudinis) ſit 40 (ſive b). Quæritur numerus Militum cujuſque Ordinis in longum & latum?

1. Pro numero Militum lateris minoris ſtatuatur } a
2. Ergo ex hypotheſi numerus Militum lateris majoris erit } $a + b$
3. Et proinde, cum Rectangulum omne, cujuſmodi eſt Acies oblonga, fiat ex ductu lateris unius in alterum, erit } $aa + ab = d$

4. Quæ

4. Quæ Æquatio cùm ſit Formulæ primæ, erit per Theor. Form. 1. $a = \sqrt{d + \frac{bb}{4}} : -\frac{b}{2} = 17$

Nempe ſi latus minus ſive latitudo Aciei conſtet ex Militibus 17, ex hypotheſi latus majus ſive longitudo ejuſdem conſtabit ex (17 + 40 =) 57. At 57 × 17 = 969, prout in Problemate poſtulatur.

Probl. II. Sunt in Taberna Sodales aliquot qui debent ſolvere 175 ſ (ſive b). Sed ipſorum duobus (ſive c) clam elapſis, Symbola ſingulorum qui remanſerunt Solidis 10 (ſive d) aucta deprehenduntur. Quæritur numerus Sodalium omnium?

1. Pro numero quæſito ſtatuatur a.
2. Ergo ex hyp. numerus eorum qui remanſerunt erat $a - c$
3. Et proinde, cùm Summa quævis ſolvenda per numerum ſolventium diviſa exhibeat æquales Portiones à ſingulis ſolvendas, Symbola ſingulorum, ſi nulli eſſent elapſi, fuerint $\frac{b}{a}$
4. Et pari ratiocinio, duobus jam elapſis, Symbola ſingulorum erunt $\frac{b}{a - c}$
5. Sed ex hypotheſi $\frac{b}{a - c} = \frac{b}{a} + d$, ſive $\frac{b + da}{a}$
6. Ergo per §. III. 1. Cap. hujus, $ba = ba + daa - bc - dca$
7. Ergo per §. III. 2. Cap. hujus, $bc = daa - dca$
8. Ergo per §. III. 4. Cap. hujus, $\frac{bc}{d} = aa - ca$.
9. Quæ cùm ſit Æquatio Form. 2da, erit per Theor. Form. 2. $a = \sqrt{\frac{bc}{d} + \frac{cc}{4}} : + \frac{c}{2} = 7$.

Nempe ſi numerus Sodalium omnium ſit 7, erit numerus eorum qui remanſerunt 5. Adeoque 7) 175^s $= 25^s$ Symbola ſingulorum, ſi nulli eſſent elapſi. Et 5) $175^s = 35^s$ Symb. eorum qui remanſerunt. At $35^s = 25^s + 10^s$, juxta tenorem Quæſtionis.

Probl. III. Quidam emit Libros aliquot, quos rurſus vendit pro 64 (ſive d) Minis; quo fit, ut Nummus expenſus eandem rationem habeat ad damnum, quam Numerus Centenarius (ſive c) ad Expenſi partem quartam (ſive m). Q^r quanti empti ſint Libri?

1. Pro dato Librorum emptorum Pretio ſtatuatur } a
2. Ergo in ipſis rurſus vendendis damnum erit } $a - d$
3. Sed $a : a-d :: c : \frac{ca-cd}{a}$, adeoque damnum per Cent. erit } $\frac{ca-cd}{a}$
4. Ergo ex hypotheſi } $\frac{ca-cd}{a} = ma$
5. Ergo per §. III. 1. Cap. hujus, } $ca - cd = maa$
6. Ergo per §. III. 2. Cap. hujus, } $ca - maa = cd$
7. Ergo per §. III. 4. Cap. hujus, } $\frac{c}{m}a - aa = \frac{cd}{m}$
8. Eſt autem Æquatio ultima Formulæ tertiæ, adeoque per Theor. Form. III. } $a = \frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{cc}{4mm} - \frac{cd}{m}} = \frac{320}{80}$

Nempe utervis numerus inventus Quæſtioni ſatisfaciet. Nam ſi Libri primò conſtarent Minis 320, & deinde venderentur pro Minis 64, damnum erit Min. 256.

256. At 320 : 256 :: 100 : 80 = $\frac{320}{4}$, juxta Problematis exigentiam.

Item si Libri primò constarent Minis 80, & deinde venderentur pro Minis 64, damnum erit Min. 16. At 80 : 16 :: 100 : 20 = $\frac{80}{4}$, juxta Problematis exigentiam.

VII. Expositâ jam Analysi Æquationum Affectarum Quadraticarum, progrediendum est ad Æquationes Affectas superiores, puta Cubicas, Biquadraticas, &c. Has omnes resolvendi Methodum generalem necnon facillimam exhibuit Cl. *Halley* Transact. Philos. N°. 210, quam idcirco præ aliis heic loci tradere visum est.

1. Supponatur Radix sive Quantitas ignota z cujusvis Æquationis composita ex partibus a & e; puta $z = a + e$, vel $z = a - e$. Quarum a ex Hypothesi assumatur ipsi z quantum fieri possit propinqua: quod tamen commodum est, non necessarium.

2. Ex a & e formentur Potestates omnes ipsius z in Æquatione data, iisq; respective affigantur Numeri Coefficientes. Proponatur v. g. Æquatio $z^4 - dzz + cz = f$, sive in Numeris $z^4 - 3zz + 75z = 10000$. Et pro prima Hypothesi ponatur $a = 10$. Erit idcirco

$$\begin{array}{rrrrrr} z^4 = & +a^4 & 4a^3e & +6a^2ee & 4ae^3 & +e^4 \\ -dz^2 = & -da^2 & -2dae & -dee & & \\ +cz = & +ca & +ce & & & \end{array}$$

Id est, in Numeris

$$\begin{array}{rrrrrr} z^4 = & +10000 & 4000e & +600ee & 40e^3 & +e^4 \\ -3z^2 = & -300 & -60e & -3ee & & \\ +75z = & +750 & +75e & & & \end{array}$$

Ubi observandum est, Potestates omnes efformatas ejusdem speciei invicem subordinandas esse; (puta Potestates omnes in quibus non reperitur e, constituunt Seriem primam efformatam; quæ habent e, secundam; quæ habent ee, tertiam, &c.) Item Potestati

ſtati cuilibet efformatæ Seriei primæ affigendum eſt ſignum, quo afficitur Poteſtas illa data ipſius z, ad quam ſpectat Poteſtas efformata; (puta, quia in Æquatione propoſita datur $+z^4$, idcirco erit $+a^4$; quia datur $-dzz$, idcirco erit $-daa$, &c.) Et idem obtinet de ſignis Poteſtatum omnium parium ipſius e, (puta e^2, e^4, &c.) uti videre eſt in Seriebus tertia & quinta. Signa in Seriebus reliquis, nempe in quibus ſunt impares Poteſtates ipſius e, (puta e, e^3, e^5, &c.) tanquam dubia omittuntur, uſque dum ſciatur an e ſit affirmativa vel negativa. Hoc autem quomodo innoteſcat, proxime dicendum eſt.

3. Poteſtas Reſolvenda ſubducatur è Summa Seriei primæ efformatæ. Et ſi poſt Subductionem Differentia, quæ vocetur b, ſit affirmativa, erit aſſumpta a juſto major, ac proinde $z=a-e$; contra, ſi Differentia ſit negativa, erit aſſumpta a juſto minor, ac proinde $z=a+e$. Hoc eſt, ſignum ipſius e determinatur ex ſigno Differentiæ b, cui ſemper contrarium eſt. Nempe ſi ſit $+b$, tum erit $-e$; ſin $-b$, tum erit $+e$. Ex. gr. Summa Seriei primæ efformatæ in Exemplo ſupra propoſito eſt 10450, è qua ſubducatur Poteſtas Reſolvenda 10000; reſtabit 450, ſive erit $+b=+450$. Unde patet, aſſumptam a eſſe juſto majorem, ac proinde in Æquatione data $z=a-e$.

$+$	10000	Series prima.
$-$	300	
$+$	750	
$+$	10450	Summa.
$-$	10000	Pot. Reſolvend.
$+$	450	Diff. ſive $+b$.

4. Reperto ipſius e ſigno, ſi fuerit $+e$, in affirmatis Æquationis datæ Membris affirmentur Poteſtates impares ipſius e, negentur in negatis. Sin fuerit $-e$, ſcribantur ſigno contrario, hoc eſt, in affirmatis Æquationis datæ Membris negentur, in negatis affirmentur. Ut

$$\begin{array}{rl} -z^4 = & +10000 - 4000e + 600ee - 40e^3 + e^4 \\ -dzz = & -\ 300 + 60e - 3ee \\ +cz = & +\ 750 - 75e \end{array}$$

5. Signis Seriei uniuſcujuſque jam inventis, Coefficientes omnes ipſius Lateris e, itemq; Quadrati ee, Cubi e^3, &c. in totidem varias colligantur Summas, quarum prima vocetur s, ſecunda t, tertia u, & ſic deinceps. Hiſce omnibus præponatur Summa Seriei primæ jam inventa. Ut

$$\begin{array}{rl} z^4 = & +10000 - 4000e + 600ee - 40e^3 + e^4 \\ -dz^2 = & -\ 300 + 60e - 3ee \\ +cz = & +\ 750 - 75e \\ \hline & 10450 - \underset{s}{4015e} + \underset{t}{597ee} - \underset{u}{40e^3} + e^4 \end{array}$$

6. Deniq; ipſa e ſemper æquatur $\frac{\frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - bt}}{t}$, quoties b ac t eodem ſigno notantur; quoties diverſo ſigno connectuntur, eadem e fit $\frac{\sqrt{\frac{1}{4}ss + bt} - \frac{1}{2}s}{t}$. Nimirum ex Hypoth. patet $10450 - 4015e + 597ee - 40e^3 + e^4 = z^4 - dzz + cz = 10000$. Quare ſubducto utrinque 10000, reſtabit $450 - 4015e + 597ee - 40e^3 + e^4$ (ſive in Symbolis $b - se + tee - ue^3 + e^4$) $= 0$. Cùm autem ſupponatur e exigua tantùm pars Radicis inquirendæ, omnes Poteſtates ipſius e multo minores evadunt ſimilibus ipſius a Poteſtatibus, adeoque in prima Hypotheſi rejiciantur Poteſtates ſuperiores ipſius e. Ut $450 - 4015e + 597ee$ (ſive in Symbolis $b - se + tee$) $= 0$. Quare tranſponendo fiet $450 = 4015e - 597ee$, ſive $b = se - tee$. Adeoque per §. VI. 4. Cap. hujus

$e =$

$e = \left(\frac{s}{2t} - \sqrt{\frac{ss}{4tt} - \frac{b}{t}}\right.$ vel, si mavis,$\left.\right) \frac{\frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - bt}}{t}$

id est, in præsenti Casu, $e = \frac{2007\frac{1}{2} - \sqrt{3761406\frac{1}{4}}}{597}$.

Unde provenit Radix quæsita prope verum, (nempe $z = a - e =$) 9,886. Hoc autem pro secunda Hypothesi substituto, emerget (operando rursus secundum sex Regulas prædictas) $a + e = z$ accuratissime 9,886260393649 5...., in ultima figura vix binario justum superans. Atque hoc etiam, si opus fuerit, multo propius ad verum accedere potest, subducendo $\frac{\frac{1}{2}ue^3 + \frac{1}{2}e^4}{\sqrt{\frac{1}{4}ss + tb}}$, si fuerit $+e$; vel addendo $\frac{\frac{1}{2}ue^3 - \frac{1}{2}e^4}{\sqrt{\frac{1}{4}ss - tb}}$ Radici prius inventæ, si fuerit $-e$.

Exemp. II. Sit $z^3 - dzz + cz = f$ sive in Numeris $z^3 - 17zz + 54z = 350$, & ponatur $a = 10$.

Erit $zzz = +aaa\ 3aae + 3aee\ eee$
$-dzz = -daa\ 2dae - dee$
$+cz = +ca\ ce$

Id est, in Numeris

$z^3 = +1000\ 300e + 30ee\ eee$
$-17z^2 = -1700\ 340e - 17ee$
$+54z = +540\ 54e$

Summa Seriei primæ efformatæ viz. $+1000 - 1700 + 540 = -160$, cui subducatur Potestas Resolvenda, fiet $b = (-160 - 350 =) -510$. Unde constat a minorem justo assumi, ac proinde e affirmativam esse. Atque adeo (juxta Reg. 4. & 5. §. hujus)

$z^3 = +1000 + 300e + 30ee + eee$
$-17z^2 = -1700 - 340e - 17ee$
$+54z = +540 + 54e$
$-160 + 14e + 13ee + eee$
$s \quad t$

Un-

Unde ex Hypotheſi, $-160+14e+13ee+eee=z^3-dz^2+tz=350$. Quare (per Reg. 6. §. hujus) ſubducto utrinque 350, & rejecto eee, reſtabit $-510+14e+13ee=0$. Et idcirco tranſponendo $510=14e+13ee$, ſive $b=se+tee$. Unde proveniet tandem $e=\frac{\sqrt{bt+\frac{1}{4}ss}-\frac{1}{2}s}{t}=\frac{\sqrt{6679}-7}{13}$. Unde $z=a+e=15,7\ldots$, quæ nimia quidem eſt ob late ſumptam a. Ideo ſupponatur ſecundò $a=15$, ac pari ratiocinio habebitur $e=\frac{\frac{1}{2}s-\sqrt{\frac{1}{4}ss-tb}}{t}=\frac{109\frac{1}{2}-\sqrt{11710\frac{1}{4}}}{28}$, ac proinde $z=14,954068$. Quod ſi calculum adhuc tertio reſtaurare velis, uſque in vigeſimam quintam figuram vero conformem invenies Radicem. Paucioribus vero contentus, ſubtrahendo aut addendo Radici prius inventæ $\frac{\frac{1}{2}eee}{\sqrt{\frac{1}{4}ss\mp tb}}$, (vel ſcribendo $tb\pm teee$ loco tb) ad ſcopum ſtatim pervenies.

NOTÆ.

Ad §. I. Algebra Græcis dici videtur Ἀναλυτικὴ, ſive Ars Reſolutoria, à reſolvendis Æquationibus. De vi vocis [Algebra] vide Cl. *Walliſii* Algebr. Cap. I. Porro notandum eſt, quod Algebriſtæ antiquiores deſignarint ſolas Quantitates ignotas per Literas, notas autem per ipſos Numeros; puta $aa-10=24$: Recentiores autem Algebriſtæ, nempe poſt *Vietam* ferè omnes, deſignant Quantitates tam datas quam quæſitas per Literas ſive Species. Hinc diſtinctionis gratia forma vetuſtior dicitur *Algebra Numeroſa*; recentior, *Specioſa*, quæ (quantum conſtat) *Vietam* agnoſcit Autorem.

At vero *Vieta*, eumque ſecuti *Oughtredus* aliique, uſi ſunt Literis majuſculis; cùm hodierni ferè omnes Algebriſtæ adhibeant

hibeant Literas minuſculas, partim brevitatis & Compendii gratia, partim ad evitandam Confuſionem, quæ ſecus in Praxi non raro extaret, eo quod Literæ majuſculæ adhiberi ſolent in deſignandis Figurarum Geometricarum Lineis. Et quidem *Carteſius*, & qui eum ſequuntur, deſignant Magnitudines datas per priores Alphabeti Literas, *a*, *b*, *c*, *d*, &c; quæſitas autem per poſteriores, *x*, *y*, *z*: Alii aliter. In hiſce Elementis nunc hæc, nunc illa Methodus adhibetur, ut nulla fere ſit Tyroni ignota.

Ad §. II. In Æquatione conſtituenda Analyſtam maxima plerumque premit difficultas. Nam Æquationis jam conſtitutæ Reductio, & deinde Solutio, certis regitur Regulis. At Æquationis conſtitutio pro variis novi cujuſque Problematis conditionibus varia eſt, & Analyſtæ ſagacitatem maxime poſtulat. Quo autem quiſque fuerit Theorematum tum Algebricorum tum Geometricorum ſupellectile ornatior atque inſtructior, eo ſagacior in Æquationibus conſtituendis futurus eſt.

Ad §. V. Obſervandum eſt, quod in ſingulis Formulis variæ Dimenſiones Quantitatis quæſitæ habent Indices in Progreſſione Arithmetica conſtitutos, puta

$aa + ba = d$. $aaaa + baa = d$. $a^6 + baaa = d$. &c.

Hinc Æquationes Affectæ Quadraticæ ab *Oughtredo* dicuntur eæ, *in quibus ſunt tres Species æqualiter in ordine Scalæ aſcendentes*. Ubi autem *tres Species* dicit *Oughtredus*, non hoc ita intelligendum eſt, quaſi non plura forent aliquando hujuſmodi Æquationum Membra; quippe ſingulæ Species poſſunt plurium eſſe Membrorum; ut $MAq + Aq + BA - CA = Fq + Aq - MN$. Ubi Membra quidem *ſeptem* ſunt, ſed *Species* tres, ſecundùm triplicem conſiderationem Dimenſionum Quantitatis quæſitæ, quarum Indices ſunt 2, 1, 0. Quippe Poteſtatis altiſſimæ $MAq + Aq$ Index eſt 2, ipſaq; *Species* ſit Aq, & $M + 1$ ejus Coefficiens. Intermediæ Poteſtatis $BA - CA$ Index eſt 1, ipſaque Species A (unius Dimenſionis) & $B - C$ ejuſdem Coefficiens. Poteſtatis infimæ (quæ eſt Quantitas abſolute cognita) $Fq + Hq - MN$, Index eſt 0, propter nullam heic comparentem quæſitæ Quantitatis Dimenſionem. Vel ſic $\overset{2}{MAq} + \overset{1}{Aq} + BA - CA = Fq + Hq - MN$. Ibid.

Ibid. 4. Valor ſecundus Quantitatis quæſitæ ſive a in Formula prima ſemper erit Negativus, quia conſtat ex duobus Terminis Negativis, nempe $a = -\sqrt{d + \frac{1}{4}bb} : -\frac{1}{2}b$. Item Valor ſecundus Quantitatis a in Formula ſecunda ſemper erit Negativus, uti patebit ex hujuſmodi Ratiocinio. Nempe liquet $d + \frac{1}{4}bb \sqsubset \frac{1}{4}bb$, & proinde $\sqrt{d + \frac{1}{4}bb} \sqsubset \sqrt{\frac{1}{4}bb}$ ſive $\frac{1}{2}b$, ideoque $\frac{1}{2}b - \sqrt{d + \frac{1}{4}bb}$ (i. e. a) erit Quantitas Negativa ſive nihilo minor. Denique ut Valor uterque Quantitatis a in Formula tertia ſit Affirmativus, in omni Æquatione ejuſdem Formulæ Numerus Abſolutus debet non eſſe major Quadrato Semi-Coefficientis. Nam patet ex Theoremate ejuſdem Formulæ puta $a = \sqrt{\frac{1}{4}bb - d} : +\frac{1}{2}b$, Numerum Abſolutum ſive d ſubducendum eſſe ex Quadrato Semi-Coefficientis ſive $\frac{1}{4}bb$, & proinde requiri, ut non ſit major Quadrato illo; ſi ſit major, Æquatio illa, adeoque Quæſtionis propoſitæ ſolutio, habenda eſt Impoſſibilis. Porro monendum eſt, ex duplici Valore ipſius a in Formula tertia unum tantum Quæſtioni propoſitæ haud raro ſatisfacere. Denique haud omittendum eſt, Radices Negativas ſæpenumero conducere ad inveſtigandas Radices Affirmativas, prout patebit ex Cap. XI. Lib. 2. Algebr. *Kerſeianæ*.

Ibid. 7. In ſolutione Problematum ſupra propoſitorum, variis uſi ſumus formis deſcribendi Praxin; eo nempe conſilio, ut nulla Praxeos deſcribendæ forma Tyronibus ſit ignota. Sic v. g. in Probl. I. 4. Theorema Formulæ primæ hunc ad modum depingitur, $a = \sqrt{d + \frac{bb}{4}} : -\frac{b}{2}$, paulo aliter quam ubi Theorema primo traditur hanc ad formam, $a = \sqrt{d + \frac{1}{4}bb} : -\frac{1}{2}b$. Nempe Forma utraq; tantundem valet; nam $\frac{bb}{4}$ idem eſt ac $\frac{1}{4}bb$, & $\frac{b}{2}$ idem ac $\frac{1}{2}b$. Item in Probl. II. 9. $a = \sqrt{\frac{bc}{d} + \frac{cc}{4}} : +\frac{c}{2}$ tantundem valet;

ac $a = \sqrt{\frac{bc}{d} + \frac{1}{4}cc} + \frac{1}{2}c$. Item in Probl. III. 8.

$a = \frac{c}{2m} + \sqrt{\frac{cc}{4mm} - \frac{cd}{m}}$ tantundem valet, ac $a = \frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{cc}{mm} - \frac{cd}{m}}$. Et utrique æquivalet forma alia, viz. $a = \frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{cc - 4cdm}{4mm}}$.

Ad §. VII. Æquationum Affectarum Cubicarum Casus (sive Varietates) 13 numerantur, qui Sublatione secundi Termini reduci solent ad tres, viz. $a^3 + ba = d$, $a^3 - ba = d$, & $ba - a^3 = d$. Et hæ dicuntur tres Formulæ Æquationum Aff. Cub. Quæ de Sublatione Termini secundi aliisque ad communem Æquationum Aff. Cubicarum necnon Biquadraticarum &c. Analysin spectantibus tradi solent, in Elementis hisce consulto omittuntur, utpote quæ non desiderantur in Methodo generali inibi tradita.

Hoc unicum restat adnotandum, quod præter Methodi istius generalis Formam Irrationalem supra in Textu jam fuse descriptam, tradit Cl. *Halley* No. 120. Transact. Philos. etiam hanc Formam Rationalem, viz. $e = \frac{sb}{ss \pm tb}$, adeoque $z = a \pm e = a \pm \frac{sb}{ss \pm tb}$. Ut vero Theorema illud sit Praxi magis accommodatum, idem sic exprimi posse monet Vir Doctissimus, $e = \frac{b}{\frac{s}{s} \pm t\frac{b}{s}}$. De hac formula vide plura in loco prædicto.

APPENDIX PRIOR

De Usu Logarithmorum.

I. *Logarithmi* sunt Numeri *Artificiales* (æquidifferentes sive) in Proportione *Arithmetica*, quemadmodum Numeri *Naturales*, quibus applicantur, sunt in Proportione *Geometrica*; viz.

Num.	Log.
1	0.00000
10	1.00000
100	2.00000
1000	3.00000
10000	4.00000
&c.	&c.

NB. 1. Quemadmodum Numerus omnis constat (juxta Cap. I. §. III.) ex binis Partibus, una Numeratrice & Denominatrice altera; sic & Logarithmus omnis constat ex binis Membris, *Notula Separatrice* (sive *Punctо* sive *Commate*, &c.) ab invicem discriminatis, quorum illud, quod ad dextram Notulæ Separatricis ponitur, respicit Partem Numeratricem Numeri ad quem spectat Logarithmus; alterum ad sinistram, Denominatricem. Nempe hujus est, Denominationem sive Locum Figuræ ultimæ (h. e. ad sinistram extimæ, adeoque reliquarum omnium) indicare, unde *Index* dici solet. Ex. gr. Index [0] Logarithmo

rithmo affixus denotat Figuram ultimam Numeri, cui respondet Logarithmus ille, *nihilo* distare ab (h. e. esse in) Loco Unitatum, adeoque Numerum ipsum esse unum ex Digitis. Index [1] denotat Figuram ultimam Numeri *uno* Loco distare à Loco Unitatum, hoc est, esse in Loco Decadum; adeoque Numerum esse aliquem inter 10 & 100. Et sic de Indicibus reliquis.

2. Quare Numeris omnibus, quorum eadem est Pars Denominatrix, non item Numeratrix, (cujusmodi sunt Numeri omnes inter 1 & 10, itemque inter 10 & 100, &c.;) respondebunt Logarithmi, quorum iidem sunt Indices, non item Membra reliqua. Et vicissim, Numeris omnibus, quorum eadem est Pars Numeratrix, non item Denominatrix; idem erit Logarithmus, mutato tantum Indice. Utrumque constabit ex Seriebus appositis:

Num. ejusdem Den. non item Num.	Log.	Num. ejusdem Num. non item Denom.	Log.
256	2,40824	,256	2,40824
257	2,40993	,256	1,40824
258	2,41161	,256	0,40824

3. Si Numerus fuerit pure Decimalis, Logarithmo ejus affigendus est Index Negativus (juxta Cap. II. §. XX. 2.) denotans distantiam Figuræ primæ (h. e. ad sinistram extimæ juxta Cap. II. §. XX. 3.) significativæ à Loco Unitatum. Ut Numeri ,256 Logarithmus est 1,40824; Numeri ,0256 Logarithm. est 2,40824; &c.

II. Utriusque *Factoris* Logarithmi simul additi conficiunt Logarithmum *Facti*. Et contra Logarithmus *Divisoris* Logarithmo *Dividendi* subductus exhibet Logarithmum *Quoti*. (Sequitur utrumque ex §. I. hujus Appendicis, & §. XVIII. Cap. XI.) Ex. gr.

Num.

Num.	Log.	Num.	Log.
68	1.83250	816	2.91168
x 12	+ 1.07918	) 12	— 1.07918
816	2.91168	68	1.83250

NB. 1. Pari ratione, Logarithmus *Radicis* alicujus, in Indicem cujuſvis Poteſtatis ductus, fit ejuſdem *Poteſtatis* Logarithmus: Hoc eſt, Logarithmus Radicis, ſi dupletur, fit Logarithmus Quadrati, ſi tripletur, Cubi; & ſic porro. Ut quia numeri 9 Logarithmus eſt 0,95424; erit 0,95424 x 2 = Log. 9 q ſive 81: & 0,95424 x 3 = Log. 9 c ſive 729. Nempe

Rad.	Log.		Log.	
9	0.95424	qui æquipollet	0.95424	Et ſic de Cubo, &c.
x 9	+ 0.95424		x 2	
Q: 81	1.90848		1.90848	

2. Quare viciſſim, Logarithmus Poteſtatis cujuſvis diviſus per Indicem Poteſtatis, exhibet Logarithmum Radicis. (Nam quod Multiplicatio conficit, Diviſio diſſolvit.) Puta quia Radicis 9 Logarithmus 0,95424 ductus in 2 facit 1,90848 Logarithmum 9 q ſive 81; idcirco 1,90848 Logarithmus Quadrati 81 diviſus per 2 dabit 0,95424 Logarithmum √ 81 ſive 9. Et ſic de Cubo, &c.

III. Additio, Subductio, Multiplicatio, & Diviſio Logarithmica nihilo diſcrepant à ſimilibus Numerorum Integrorum Operationibus, ſi Indices Logarithmorum ſint Affirmativi, uti patet ex Exemplis jam allatis.

1. Sin Indices (omnes aut aliquot) ſint Negativi, tum obſervandæ ſunt Regulæ Algebraicæ de ſignis + & —, cùm ad Indices perventum ſit. Nam in Logarithmo etiam Fractionis, Index ſolus ſpectandus eſt tanquam Negativus; Membrum reliquum tanquam Affirmativum. Et proinde ſiquid transferendum ſit à

Mem-

Membro altero ad Indicem Negativum, tralatitium illud (cùm sit Affirmativum) pari modo comparandum est cum Indice Negativo, ac si Index Affirmativus & Negativus essent invicem comparandi. Puta, quemadmodum in Exemplo primo Additionis infra apposito, (ubi Indices soli invicem comparantur,) $1 + \bar{1} = 0$: sic in Exemplo secundo Additionis, (ubi ad Indices 1 & $\bar{3}$ transferendus est numerus 1 è Summa Figurarum $8 + 6$ proxime præcedentium,) $1 + \bar{3} + 1 = \bar{1}$. Item in Exemplo secundo Multiplicationis, (ubi ad Productum ex $\bar{2} \times 5$ transferendus est 2 è Producto proxime præcedenti ex 4×5,) $\bar{2} \times 5 = \overline{10}$, & $\overline{10} + 2 = \bar{8}$. Quocirca ut in Divisione emergat iterum 2 in Quoto, dividendus est $\overline{10}$ (non 8) per 5, nempe 5) $\overline{10}$ (2, & Excessus $\overline{10}$ supra $\bar{8}$ habendus est Affirmativus, puta 2, qui unà cum Figura proxima Dividendi (v. g. in Exemplo secundo Divisionis, 23) constituit proximum Dividuum: (v. g. 23 divisus per 5 dat 4:) unde oritur hæc Regula de Divisione Indicum Negativorum:

2. Si Divisor accurate metiatur Indicem Negativum, Numerus per Divisionem inventus est Quotus. Secùs, Index Negativus Unitatibus augeatur, usque dum Divisor eundem accurate metiri queat: Numerus exinde per Divisionem inventus est Quotus; & Augmentum (quod semper est Affirmativum) unà cum Figura proxima Dividenda constituit proximum Dividuum particularem.

Exempla Additionis.

Num.	Log.	Num.	Log.	Num.	Log.
68	1.83250	73	1.86332	⌊061	$\bar{2}.78532$
× ⌊12	$\bar{1}.27918$	× ⌊005	$\bar{3}.69897$	⌊004	$\bar{3}.60206$
8 ⌊16	0.91168	⌊365	$\bar{1}.56229$	⌊000244	$\bar{4}.38738$

Exem-

Exempla Subductionis.

Num.	Log.	Num.	Log.	Num.	Log.
8,16	0,91168	,365	$\bar{1}$,56229	,000244	$\bar{4}$,38738
),12	$\bar{1}$,07918	),73	$\bar{1}$,86332	),004	$\bar{3}$,60206
68	1,83250	,005	$\bar{3}$,69897	,061	$\bar{2}$,78532

Exempla Multiplicationis.

	Num.	Log.
Qu.	,029 = ,000841	$\bar{2}$,46239 x 2 = $\bar{4}$,92478
QC.	,03 = ,0000000243	$\bar{2}$,47712 x 5 = $\bar{8}$,38560

Exempla Divisionis.

	Num.	Log.
√	,000841 = ,029	2) $\bar{4}$,92478 ($\bar{2}$,46239
√ qc	,0000000243 = ,03	5) $\bar{8}$,38560 ($\bar{2}$,47712

IV. Restat ultimo loco tradendus Canonis sive Tabulæ Logarithmicæ Usus, qui duplex est: nempe ope Canonis, vel dato Numero, reperitur ejusdem Logarithmus; vel contra, dato Logarithmo, reperitur ejusdem Numerus.

Primò de inveniendo Numeri dati Logarithmo.

Reg. 1. Si Numerus sit Integer, & intra Tabulæ limites contineatur, ipsi sub serie [N] reperto adstabit ad dextram Logarithmus suus. Ut numero 366 adstat Log. sinus 2,56348.

2. Si Numerus sit partim Integer partim Decimalis, aut si totus sit Decimalis; quæratur Logarithmus ejusdem, ac si totus esset Integer, & deinde mutetur sive apponatur Index juxta §. I. 1 & 3. Ut numeri 36,6 Log. erit 1,56348; numeri 3,66 Log. erit 0,56348; numeri ,366 Log. erit $\bar{1}$,56348, &c.

3. Si quæratur Logarithmus Fractionis Vulgaris, puta $\frac{3}{4}$; per Reg. 1. inveniantur Logarithmi Numeratoris & Denominatoris, puta Numeratoris 3 Logarithmus est 0,47712, & Denominatoris 4 Logarithmus

mus est 0,60206. Hic illi subductus exhibet Logarithmum quæsitum; puta 0,47712 — 0,60206 = $\bar{1}$,87506 Log. Fractionis $\frac{3}{4}$. Si Fractio Vulgaris sit Mixta, (h. e. si Integro adhæreat,) puta $2\frac{3}{4}$, reducatur ad Impropriam, puta $\frac{11}{4}$, & deinde quæratur Logarithmus, ut prius. Nempe Log. 11 — Log. 4 = 1,04139 — 0,60206 = 0,43933 Log. Fractionis $\frac{11}{4}$ sive $2\frac{3}{4}$. Et in utroque Casu, eodem redit Operatio, si convertatur Fractio Vulgaris in Decimalem, & hujusce Logarithmus quæratur per Reg. 2. Ut $\frac{3}{4}$ = ,75, cujus Logarithmus juxta Reg. 2. est $\bar{1}$,87506, uti prius. Item $2\frac{3}{4}$ = 2,75, cujus Logarithmus juxta Reg. 2. est 0,43933, uti prius.

Secundò de inveniendo Logarithmi dati Numero.

4. Neglecto Indice Logarithmi dati, si Membrum reliquum in serie [Log.] accurate reperiatur, Numerus ad lævam adscriptus erit is qui queritur. Utrum vero habendus sit tanquam Integer, aut Decimalis, aut ex utroque Mixtus, Index Logarithmi dati ostendit. Quæratur v. g. Numerus Logarithmi 2,56348. Membro 56348 in serie [Log.] reperto adstat ad lævam Numerus quæsitus 366, qui totus est Integer ob sedem Figuræ ultimæ 3 Indici dato 2 congruentem. Sin datus esset Logarithmus 1,56348, Numerus esset 36,6, nempe ut sedes Figuræ 3 Indici dato 1 conveniret. Et similiter, si datus esset Log. $\bar{2}$,56348, Numerus totus esset Decimalis, atque etiam præponenda esset Cifra, puta ,0366, nempe ob Indicem datum $\bar{2}$.

V. Ex Regulis quatuor præmissis liquet, facillimam esse operationem per Logarithmos, quoties Numeri dati & quæsiti intra limites Tabulæ Logarithmicæ (qua usus est Arithmeticus) continentur. Sectis autem, præstabit uti communi Multiplicationis (&c.) forma, aut saltem laminis *Neiperianis*. Est enim operosa

rosa satis Methodus inveniendi Numeros qui limites Tabulæ Logarithmicæ excedunt. Siquis nihilominus eandem scire velit, Notas sequentes consulat.

NOTÆ.

Ad §. I. *Logarithmos* excogitavit Nobilissimus *Neperi, Merchistonii* apud Scotos Baro; perfecit & consummavit *H. Briggs* (Professorum Geometriæ Savilianorum apud *Oxonienses* primus) calculo supra modum laborioso. In labore illo levando multi exinde Mathematici suam collocarunt operam, nemo autem feliciori cum successu, quam Clarissimus *Halley*, qui non ita pridem exhibuit Methodum maxime compendiosam necnon facillimam construendi Logarithmos, de qua vide Philos. Transact. N. 216. Heic autem admonendum videtur, Logarithmorum definitionem seu potius descriptionem supra traditam respicere non tam ipsorum Naturam quam Usum. Nam si naturam spectes, Logarithmi definiendi sunt juxta vocis Etymon λόγοι ἀριθμοί, i. e. Numeri (Exponentes scilicet sive Indices) Rationum, aut potius Ratiunicularum, in quas pro libitu distribui intelligitur Ratio Numeri cujusvis ad Unitatem. Hinc si Ratio decupla sive 10 ad 1 intelligatur continere Ratiunculas 100000 &c. quousque libet, patet Rationem decuplam duplicatam sive Rationem centuplam continere ejusmodi Ratiunculas 200000 &c; item Rationem decuplam triplicatam sive Rationem millecuplam continere ejusmodi Ratiunculas 300000 &c; atque adeo fieri non posse, quin ipsi Logarithmi essent in Arithmetica proportione, eorumque Numeri in Geometrica. Vide plura in Transact. Philos. prædict. & in Logarithmotechnia *Nic. Mercatoris*.

NB. Numeri Naturales, quibus respondent Logarithmi, peculiari nomine dici solent *Absoluti*. Et qui nonnullis Indices, aliis *Characteristicæ* Logarithmorum appellantur. Porro pro Indicibus negativis $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$, &c. utuntur nonnulli eorum Complementis ad 10, puta $\bar{9}, \bar{8}, \bar{7}$, &c. sed plaxi aliquatenus diversa, uti videre est in Op. Math. *Jonæ Moore* Equitis.

Ad §. II. Non semper eadem erit (aut saltem in Tabulis reperietur) Figura ultima (sive ad dextram extima) ejusdem Logarithmi. Sed tuto negligi potest discrepantia illa,

utpote exigua. Cum enim Logarithmus omnis (excepto Indice) conſtet ex figuris Decimalibus, diſcrepantia figuræ quintæ aut ſextæ, &c. aſſurgere nequit ad $\frac{1}{1000}$. Hoc autem non erat reticendum, ne Tyro praxin ſuam male adminiſtratam eſſe cenſeret, ſiquando diſcrepantia talis occurreret inter eundem Logarithmum, in praxi inventum & in Tabula deſcriptum.

Ad §. IV. *Reg* 3. Alia eſt Methodus efformandi Logarithmos Fractionum Vulgarium, nempe quæ ponit Exceſſum quo Logarithmus Denominatoris excedit Logarithmum Numeratoris, tanquam Logarithmum pure Negativum Fractionis alicujus datæ. Puta, ſecundum hanc Formulam Log. 0,47712 — Log. 0,60206 dabit — 0,12494. Logarithmum Fractionis $\frac{3}{4}$, loco $\bar{1}$,87506 Log. Fractionis $\frac{3}{4}$ juxta Formulam in textu traditam, quæ quidem præſtantior eſt, quia unica Operatione exhibet Logarithmum Fractionis Decimalis Vulgari datæ æquivalentem, ad quem exhibendum Formula hæc in Notis tradita duplicem poſtulat Operationem. Puta, juxta Formulam primam 0,47712 — 0,60206 ſtatim dat $\bar{1}$,87506, cui congruit Decimalis ,75. At juxta Formulam ultimam 0,47712 — 0,60206 dat — 0,12494, qui deinde ſubductus ex Log^{mo} numeri 10 (puta 1.00000 — 0,12494) dat 0,87506 Logarithmum numeri 75, qui porro habendus eſt pro ,75 ob Indicem 0, nempe uti docetur ſecundum hanc Formulam. Nam Regula eſt, quod pro Unitate qualibet Indicis Logarithmi inventi, ſtatuenda eſt Cifra Decimalis ante Figuram primam Numeri, qui in Tabula reſpondet Logarithmo invento, neglecto Indice. Adeoque Logarithmo 0,87506 congruit ,75; Log^{mo} $\bar{1}$,87506 congruit ,075. Et ſic porro.

Ad §. V. Conſtat ex iis quæ in §. adſcripta jam tradita ſunt, Tabulam Logarithmicam eſſe praxi eo commodiorem, quo majoris eſt ambitus, hoc eſt, quo plurium Numerorum Logarithmos exhibet. Hinc præ aliis comparandæ ſunt Arithmetico Practico Tabulæ *Briggianæ*, vel ſaltem *Ulacquianæ*. Tabella ſequens apponitur potius Speciminis gratia ad oſtendendam Tabulis amplioribus utendi methodum, quam ob aliquem ipſius uſum in calculis Arithmeticis facilitandis, quippe quæ ultra Chiliadem non aſcendit. Poteſt tamen inſervire Logarithmis Numerorum ultra Chiliadem inveniendis, adhibito

hibito (ſi operæ pretium fuerit) hujuſmodi artificio, nempe

1. Si Numerus datus v. g. 87654 limites Tabulæ excedat, quæratur primo Logarithmus Figurarum totidem poſteriorum, quot intra Tabulæ limites continentur, puta 876, qui interim Numerus habendus eſt tanquam 87600, nempe ob omiſſos binos locos Numeri dati. Erit Logarithmus quæſitus, neglecto Indice, 94250. Deinde quæratur Logarithmus Numeri dato proxime majoris, puta 877 ſive 87700, eritque neglecto Indice 94300. Ut ſe habet Differentia Numerorum 87600 & 87700 ad Differentiam ipſorum Logarithmorum 94250 & 94300; ita ſe habebit pars reſidua Numeri dati, puta 54, ad Numerum qui Log^mo partis jam ſumptæ Numeri dati, puta 876, additus conficiet (Indice debite appoſito juxta §. I. 1.) Logarithmum totius Numeri dati, puta 87654. Ex. gr. 100 : 50 :: 54 : 27. Quare 94250 + 27 = 94277 ſive (appoſito Indice legitimo) 4,94277 erit Logarithmus Numeri 87654.

2. Si Logarithmus datus v. g. 4,94277, in Tabula reperiri nequeat, ſumatur (neglecto Indice) Log^mus dato proxime minor, atque etiam proxime major, v. g. 94250 & 94300. Ut ſe habet Differentia Logarithmorum ſumptorum ad Differentiam Numerorum reſpondentium, Cifris pro ratione Indicis Logarithmi dati auctam; ita ſe habebit Differentia Log^mi dati & proxime majoris, ad Numerum qui Logarithmi proxime minoris Numero præpoſitus conficiet Numerum quæſitum. Ex. gr.

Log. datus, 94277 } Diff. 27.
Log. proxime minor, 94250 }
Log. proxime major, 94300 } Diff. 50.

N. Log. proxime min. 876 } h. e. reſpectu Indicis dati 4. { 87600 } Diff.
N. Log. prox. majoris, 877 } { 87700 } 100.

Quare 50 : 100 :: 27 : 54. Adeoque 87654 eſt Numerus quæſitus Logarithmo dato 4,94277 congruens.

NB. Eadem eſt operandi ratio, ſi Numerus datus vel quæſitus fuerit partim aut pure Decimalis, obſervatis fere iis quæ ſupra tradita ſunt in §. IV. de Numeris iſtiuſmodi.

TABELLA LOGARITHMICA

Exhibens *Logarithmos* Numerorum omnium ab Unitate ad Chiliadem.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
1	0.00000	31	1.49136	61	1.78533	91	1.95904
2	0.30103	32	1.50515	62	1.79239	92	1.96378
3	0.47712	33	1.51851	63	1.79934	93	1.96848
4	0.60206	34	1.53147	64	1.80618	94	1.97312
5	0.69897	35	1.54406	65	1.81291	95	1.97772
6	0.77815	36	1.55630	66	1.81954	96	1.98227
7	0.84509	37	1.56820	67	1.82607	97	1.98677
8	0.90309	38	1.57978	68	1.83250	98	1.99122
9	0.95424	39	1.59106	69	1.83884	99	1.99563
10	1.00000	40	1.60206	70	1.84509	100	2.00000
11	1.04139	41	1.61278	71	1.85125	101	2.00432
12	1.07918	42	1.62324	72	1.85733	102	2.00860
13	1.11394	43	1.63346	73	1.86332	103	2.01283
14	1.14612	44	1.64345	74	1.86923	104	2.01703
15	1.17609	45	1.65321	75	1.87506	105	2.02118
16	1.20412	46	1.66275	76	1.88081	106	2.02530
17	1.23044	47	1.67209	77	1.88649	107	2.02938
18	1.25527	48	1.68124	78	1.89209	108	2.03342
19	1.27875	49	1.69019	79	1.89762	109	2.03742
20	1.30103	50	1.69897	80	1.90309	110	2.04139
21	1.32221	51	1.70757	81	1.90848	111	2.04532
22	1.34242	52	1.71600	82	1.91381	112	2.04921
23	1.36172	53	1.72427	83	1.91907	113	2.05307
24	1.38021	54	1.73239	84	1.92427	114	2.05690
25	1.39794	55	1.74036	85	1.92941	115	2.06069
26	1.41497	56	1.74818	86	1.93449	116	2.06445
27	1.43136	57	1.75587	87	1.93951	117	2.06818
28	1.44715	58	1.76342	88	1.94448	118	2.07188
29	1.46239	59	1.77085	89	1.94939	119	2.07554
30	1.47712	60	1.77815	90	1.95424	120	2.07918

N.	Log.	N.	Log.	N	Log.	N.	Log.
121	2.08278	161	2.20682	201	2.30319	241	2.38201
122	2.08635	162	2.20951	202	2.30535	242	2.38381
123	2.08990	163	2.21218	203	2.30749	243	2.38560
124	2.09342	164	2.21484	204	2.30963	244	2.38738
125	2.09691	165	2.21748	205	2.31175	245	2.38916
126	2.10037	166	2.22010	206	2.31386	246	2.39093
127	2.10380	167	2.22271	207	2.31597	247	2.39269
128	2.10721	168	2.22530	208	2.31806	248	2.39445
129	2.11058	169	2.22788	209	2.32014	249	2.39619
130	2.11394	170	2.23044	210	2.32221	250	2.39794
131	2.11727	171	2.23299	211	2.32428	251	2.39967
132	2.12057	172	2.23552	212	2.32633	252	2.40140
133	2.12385	173	2.23804	213	2.32837	253	2.40312
134	2.12710	174	2.24054	214	2.33041	254	2.40483
135	2.13033	175	2.24303	215	2.33243	255	2.40654
136	2.13353	176	2.24551	216	2.33445	256	2.40824
137	2.13672	177	2.24797	217	2.33645	257	2.40993
138	2.13987	178	2.25042	218	2.33845	258	2.41161
139	2.14301	179	2.25285	219	2.34044	259	2.41329
140	2.14612	180	2.25527	220	2.34242	260	2.41497
141	2.14921	181	2.25767	221	2.34439	261	2.41664
142	2.15228	182	2.26007	222	2.34635	262	2.41830
143	2.15533	183	2.26245	223	2.34830	263	2.41995
144	2.15836	184	2.26481	224	2.35024	264	2.42160
145	2.16136	185	2.26717	225	2.35218	265	2.42324
146	2.16435	186	2.26951	226	2.35410	266	2.42488
147	2.16731	187	2.27184	227	2.35602	267	2.42651
148	2.17026	188	2.27415	228	2.35793	268	2.42813
149	2.17318	189	2.27646	229	2.35983	269	2.42975
150	2.17609	190	2.27875	230	2.36172	270	2.43136
151	2.17897	191	2.28103	231	2.36361	271	2.43296
152	2.18184	192	2.28330	232	2.36548	272	2.43456
153	2.18469	193	2.28555	233	2.36735	273	2.43616
154	2.18752	194	2.28780	234	2.36921	274	2.43775
155	2.19033	195	2.29003	235	2.37106	275	2.43933
156	2.19312	196	2.29225	236	2.37291	276	2.44090
157	2.19589	197	2.29446	237	2.37474	277	2.44247
158	2.19865	198	2.29666	238	2.37657	278	2.44404
159	2.20139	199	2.29885	239	2.37839	279	2.44560
160	2.20412	200	2.30103	240	2.38021	280	2.44715

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
281	2.44870	321	2.50650	361	2.55750	401	2.60314
282	2.45024	322	2.50785	362	2.55870	402	2.60422
283	2.45178	323	2.50920	363	2.55990	403	2.60530
284	2.45331	324	2.51054	364	2.56110	404	2.60638
285	2.45484	325	2.51188	365	2.56229	405	2.60745
286	2.45636	326	2.51321	366	2.56348	406	2.60852
287	2.45788	327	2.51454	367	2.56466	407	2.60959
288	2.45939	328	2.51587	368	2.56584	408	2.61066
289	2.46089	329	2.51719	369	2.56702	409	2.61172
290	2.46239	330	2.51851	370	2.56820	410	2.61278
291	2.46389	331	2.51982	371	2.56937	411	2.61384
292	2.46538	332	2.52113	372	2.57054	412	2.61489
293	2.46686	333	2.52244	373	2.57170	413	2.61595
294	2.46834	334	2.52374	374	2.57287	414	2.61700
295	2.46982	335	2.52504	375	2.57403	415	2.61804
296	2.47129	336	2.52633	376	2.57518	416	2.61909
297	2.47275	337	2.52762	377	2.57634	417	2.62013
298	2.47421	338	2.52891	378	2.57749	418	2.62117
299	2.47567	339	2.53019	379	2.57863	419	2.62221
300	2.47712	340	2.53147	380	2.57978	420	2.62324
301	2.47856	341	2.53275	381	2.58092	421	2.62428
302	2.48000	342	2.53402	382	2.58206	422	2.62531
303	2.48144	343	2.53529	383	2.58319	423	2.62634
304	2.48287	344	2.53655	384	2.58433	424	2.62736
305	2.48429	345	2.53781	385	2.58546	425	2.62838
306	2.48572	346	2.53907	386	2.58658	426	2.62940
307	2.48713	347	2.54032	387	2.58771	427	2.63042
308	2.48855	348	2.54157	388	2.58883	428	2.63144
309	2.48995	349	2.54282	389	2.58994	429	2.63245
310	2.49136	350	2.54406	390	2.59106	430	2.63346
311	2.49276	351	2.54530	391	2.59217	431	2.63447
312	2.49415	352	2.54654	392	2.59328	432	2.63548
313	2.49554	353	2.54777	393	2.59439	433	2.63648
314	2.49692	354	2.54900	394	2.59549	434	2.63748
315	2.49831	355	2.55022	395	2.59659	435	2.63848
316	2.49968	356	2.55145	396	2.59769	436	2.63948
317	2.50105	357	2.55266	397	2.59879	437	2.64048
318	2.50242	358	2.55388	398	2.59988	438	2.64147
319	2.50379	359	2.55509	399	2.60097	439	2.64246
320	2.50515	360	2.55630	400	2.60206	440	2.64345

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
441	2.64443	481	2.68214	521	2.71683	561	2.74896
442	2.64542	482	2.68304	522	2.71767	562	2.74973
443	2.64640	483	2.68394	523	2.71850	563	2.75050
444	2.64738	484	2.68484	524	2.71933	564	2.75127
445	2.64836	485	2.68574	525	2.72015	565	2.75204
446	2.64933	486	2.68663	526	2.72098	566	2.75281
447	2.65030	487	2.68752	527	2.72181	567	2.75358
448	2.65127	488	2.68841	528	2.72263	568	2.75434
449	2.65224	489	2.68930	529	2.72345	569	2.75511
450	2.65321	490	2.69019	530	2.72427	570	2.75587
451	2.65417	491	2.69108	531	2.72509	571	2.75663
452	2.65513	492	2.69196	532	2.72591	572	2.75739
453	2.65609	493	2.69284	533	2.72672	573	2.75815
454	2.65705	494	2.69372	534	2.72754	574	2.75891
455	2.65801	495	2.69460	535	2.72835	575	2.75966
456	2.65896	496	2.69548	536	2.72916	576	2.76042
457	2.65991	497	2.69635	537	2.72997	577	2.76117
458	2.66086	498	2.69722	538	2.73078	578	2.76192
459	2.66181	499	2.69810	539	2.73158	579	2.76267
460	2.66275	500	2.69897	540	2.73239	580	2.76342
461	2.66370	501	2.69983	541	2.73319	581	2.76417
462	2.66464	502	2.70070	542	2.73399	582	2.76492
463	2.66558	503	2.70156	543	2.73479	583	2.76566
464	2.66651	504	2.70243	544	2.73559	584	2.76641
465	2.66745	505	2.70329	545	2.73639	585	2.76715
466	2.66838	506	2.70415	546	2.73719	586	2.76789
467	2.66931	507	2.70500	547	2.73798	587	2.76863
468	2.67024	508	2.70586	548	2.73878	588	2.76937
469	2.67117	509	2.70671	549	2.73957	589	2.77011
470	2.67209	510	2.70757	550	2.74036	590	2.77085
471	2.67302	511	2.70842	551	2.74115	591	2.77158
472	2.67394	512	2.70927	552	2.74193	592	2.77232
473	2.67486	513	2.71011	553	2.74272	593	2.77305
474	2.67577	514	2.71096	554	2.74350	594	2.77378
475	2.67669	515	2.71180	555	2.74429	595	2.77451
476	2.67760	516	2.71264	556	2.74507	596	2.77524
477	2.67851	517	2.71349	557	2.74585	597	2.77597
478	2.67942	518	2.71432	558	2.74663	598	2.77670
479	2.68033	519	2.71516	559	2.74741	599	2.77742
480	2.68124	520	2.71600	560	2.74818	600	2.77815

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
601	2.77887	641	2.80685	681	2.83314	721	2.85795
602	2.77959	642	2.80753	682	2.83378	722	2.85853
603	2.78031	643	2.80821	683	2.83442	723	2.85913
604	2.78103	644	2.80888	684	2.83505	724	2.85973
605	2.78175	645	2.80955	685	2.83569	725	2.86033
606	2.78247	646	2.81023	686	2.83632	726	2.86093
607	2.78318	647	2.81090	687	2.83695	727	2.86153
608	2.78390	648	2.81157	688	2.83758	728	2.86213
609	2.78461	649	2.81224	689	2.83821	729	2.86272
610	2.78532	650	2.81291	690	2.83884	730	2.86332
611	2.78604	651	2.81358	691	2.83947	731	2.86391
612	2.78675	652	2.81424	692	2.84010	732	2.86451
613	2.78746	653	2.81491	693	2.84073	733	2.86510
614	2.78816	654	2.81557	694	2.84135	734	2.86569
615	2.78887	655	2.81624	695	2.84198	735	2.86628
616	2.78958	656	2.81690	696	2.84260	736	2.86687
617	2.79028	657	2.81756	697	2.84323	737	2.86746
618	2.79098	658	2.81822	698	2.84385	738	2.86805
619	2.79169	659	2.81888	699	2.84447	739	2.86864
620	2.79239	660	2.81954	700	2.84509	740	2.86923
621	2.79309	661	2.82020	701	2.84571	741	2.86981
622	2.79379	662	2.82085	702	2.84633	742	2.87040
623	2.79448	663	2.82151	703	2.84695	743	2.87098
624	2.79518	664	2.82216	704	2.84757	744	2.87157
625	2.79588	665	2.82282	705	2.84818	745	2.87215
626	2.79657	666	2.82347	706	2.84880	746	2.87273
627	2.79726	667	2.82412	707	2.84941	747	2.87332
628	2.79795	668	2.82477	708	2.85003	748	2.87390
629	2.79865	669	2.82542	709	2.85064	749	2.87448
630	2.79934	670	2.82607	710	2.85125	750	2.87506
631	2.80002	671	2.82672	711	2.85186	751	2.87563
632	2.80071	672	2.82736	712	2.85248	752	2.87621
633	2.80140	673	2.82801	713	2.85308	753	2.87679
634	2.80208	674	2.82865	714	2.85369	754	2.87737
635	2.80277	675	2.82930	715	2.85430	755	2.87794
636	2.80345	676	2.82994	716	2.85491	756	2.87852
637	2.80413	677	2.83058	717	2.85551	757	2.87909
638	2.80482	678	2.83122	718	2.85612	758	2.87966
639	2.80550	679	2.83186	719	2.85672	759	2.88024
640	2.80618	680	2.83250	720	2.85733	760	2.88081

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
761	2.88138	801	2.90363	841	2.92479	881	2.94497
762	2.88193	802	2.90417	842	2.92531	882	2.94546
763	2.88248	803	2.90472	843	2.92582	883	2.94596
764	2.88309	804	2.90525	844	2.92634	884	2.94645
765	2.88366	805	2.90579	845	2.92685	885	2.94694
766	2.88422	806	2.90633	846	2.92737	886	2.94743
767	2.88479	807	2.90687	847	2.92788	887	2.94792
768	2.88536	808	2.90741	848	2.92839	888	2.94841
769	2.88592	809	2.90794	849	2.92890	889	2.94890
770	2.88649	810	2.90848	850	2.92941	890	2.94939
771	2.88705	811	2.90902	851	2.92992	891	2.94987
772	2.88761	812	2.90955	852	2.93043	892	2.95036
773	2.88817	813	2.91009	853	2.93094	893	2.95085
774	2.88874	814	2.91062	854	2.93145	894	2.95133
775	2.88930	815	2.91115	855	2.93196	895	2.95182
776	2.88986	816	2.91169	856	2.93247	896	2.95230
777	2.89042	817	2.91222	857	2.93298	897	2.95279
778	2.89097	818	2.91275	858	2.93348	898	2.95327
779	2.89153	819	2.91328	859	2.93399	899	2.95375
780	2.89209	810	2.91381	860	2.93449	900	2.95424
781	2.89265	821	2.91434	861	2.93500	901	2.95472
782	2.89320	822	2.91487	862	2.93550	902	2.95520
783	2 89376	823	2.91539	863	2.93601	903	2.95568
784	2.89431	824	2.91592	864	2 93651	904	2.95616
785	2.89486	825	2.91645	865	2.93701	905	2.95664
786	2.89542	826	2.91698	866	2.93751	906	2.95712
787	2.89597	827	2.91750	867	2.93801	907	2.95760
788	2.89652	828	2.91803	868	2.93851	908	2.95808
789	2.89707	829	2.91855	869	2.93901	909	2.95856
790	2.89762	830	2.91907	870	2.93951	910	2.95904
791	2.89817	831	2.91960	871	2.94001	911	2.95951
792	2.89872	832	2.92012	872	2.94051	912	2.95999
793	2.89927	833	2.92064	873	2.94101	913	2 96047
794	2.89982	834	2.92116	874	2.94151	914	2.96094
795	2.90036	835	2.92168	875	2.94200	915	2.96142
796	2.90091	836	2.92220	876	2.94250	916	2.96189
797	2.90145	837	2.92272	877	2.94299	917	2.96236
798	2.90200	838	2.92324	878	2.94349	918	2.96284
799	2.90254	839	2.92376	879	2.94398	919	2.96331
800	2.90309	840	2.92427	880	2.94448	920	2.96378

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
921	2.96425	941	2.97358	961	2.98272	981	2.99166
922	2.96473	942	2.97405	962	2.98317	982	2.99211
923	2.96520	943	2.97451	963	2.98362	983	2.99255
924	2.96567	944	2.97497	964	2.98407	984	2.99299
925	2.96614	945	2.97543	965	2.98452	985	2.99343
926	2.96661	946	2.97589	966	2.98497	986	2.99387
927	2.96707	947	2.97635	967	2.98542	987	2.99431
928	2.96754	948	2.97680	968	2.98587	988	2.99475
929	2.96801	949	2.97726	969	2.98632	989	2.99519
930	2.96848	950	2.97772	970	2.98677	990	2.99563
931	2.96894	951	2.97818	971	2.98721	991	2.99607
932	2.96941	952	2.97863	972	2.98766	992	2.99651
933	2.96988	953	2.97909	973	2.98811	993	2.99694
934	2.97034	954	2.97954	974	2.98855	994	2.99738
935	2.97081	955	2.98000	975	2.98900	995	2.99782
936	2.97127	956	2.98045	976	2.98944	996	2.99826
937	2.97173	957	2.98091	977	2.98989	997	2.99869
938	2.97220	958	2.98136	978	2.99033	998	2.99913
939	2.97266	959	2.98181	979	2.99078	999	2.99956
940	2.97312	960	2.98227	980	2.99122	1000	3.00000

APPENDIX POSTERIOR:

Viz.

Problemata sive Quæstiones ad exercendas Regulas Arithmeticæ.

I. Additionis.

1. Divisa est *Roma* ab *Augusto* in Regiones (Anglice Wards) 14, quarum prima ambitu suo amplexa est Vicos 9, secunda 12, tertia 8, quarta 8, quinta 15, sexta 12, septima 40, octava 12, nona 30, decima 7, undecima 8, duodecima 12, decima-tertia 17, decima-quarta 23. Quænam erat Summa Vicorum in Regionibus universis? Resp. 213. *Vide Cap. II. P. II. Romæ Antiq. Notitiæ, unde peti possunt Exempla plura huc spectantia, viz. de numero Templorum, Balneorum, &c.*

2. *Homerus* in Catalogo Navium memorat versu 509 Naves 50, v. 516 Naves 30, v. 524 Naves 40, v. 534 Naves 40, v. 545 Naves 40, v. 556 Naves 50, v. 557 Naves 12, v. 568 Naves 80, v. 576 Naves 100, v. 587 Naves 60, v. 602 Naves 90, v. 610 Naves 60, v. 618 Naves 40, v. 630 Naves 40, v. 637 Naves 12, v. 644 Naves 40, v. 652 Naves 80, v. 654 Naves 9, v. 671 Naves 3, v. 680 Naves 30, v. 685 Naves 50, v. 710 Naves 40, v. 713 Naves 11, v. 719 Naves 7, v. 733 Naves 30, v. 737 Naves 40, v. 747 Naves 40, v. 748 Naves 22, v. 759 Naves 40. Quæritur Summa Navium omnium Classem Græcanicam constituentium? Resp. 1186.

3. Numerus Incolarum *Parisiensium* haud ita pridem statuebatur 488055, Incolarum *Rothomagensium* 80000, Incolarum *Romæ* 125000. Quam Summam conficiunt Incolæ trium harum Urbium simul sumpti? Resp. 693055. *Vide Transact. Philos. N.* 185.

¶ Æra Christiana cœpit Anno Periodi Julianæ 4714. Hinc si dato Anno Æræ Christianæ addantur 4713, Summa erit Annus Periodi Julianæ Anno Domini dato congruens:

4. Quisnam igitur Annus Per. Jul. Anno Domini jam currenti 1698 congruit? Resp. 6411.

¶ Epocha U. C. sive Urbis i. e. *Romæ* Conditæ cœpit juxta computum *Varronem* Anno Per. Jul. 3961. Hinc Anno U. C. dato adde 3960, & habebis Annum Per. Jul. ei congruentem.

5. Igitur quis Annus P. J. congruit Anno U. C. 472, quo nempe (uti ait *Plinius*, l. 8. c. 6.) Elephantos *Italia* primum vidit? Resp. 4432.

6. Luna percurrit Zodiacum (adeoque Annus Lunaris constat) $354^{d}.\ 8^{h}.\ 48'$; nempe $10^{d}.\ 21^{h}.\ 1'$ citius quam Sol. Quodnam igitur est Spatium Anni Solaris, sive Temporis quo Sol percurrit Zodiacum? Resp. $365^{d}.\ 5^{h}.\ 49'$.

7. Num. 223. *Transact. Philos.* exhibita est in Libris & partibus Libræ, quæ vulgo dicitur a Pound Troy, quantitas Aquæ Pluvialis in Collegio *Gresshamensi* decidentis à prid. Id. Aug. 1695 ad prid. Id. Aug. 1696. Nempe à prid. Id. Aug. 1695 ad exitum Augusti decidit $7^{lib.}\ 0\beta.\ 462^{gr}$; Mense Septembris $9^{lib.}\ 1\beta.\ 37^{gr}$; Octobris $2^{lib.}\ 7\beta.\ 368^{gr}$; Novembris $3^{lib.}\ 10\beta.\ 386^{gr}$; Decembris $11^{lib.}\ 5\beta.\ 78^{gr}$; Januarii $8^{lib.}\ 3\beta.\ 169^{gr}$; Februarii $12^{lib.}\ 6\beta.\ 125^{gr}$; Martii $6^{lib.}\ 10\beta.\ 455^{gr}$; Aprilis 1696, $6^{lib.}\ 2\beta.\ 99^{gr}$; Maii $20^{lib.}\ 1\beta.\ 210^{gr}$; Junii $15^{lib.}\ 7\beta.\ 258^{gr}$; Julii $23^{lib.}\ 11\beta.\ 136^{gr}$; deinde ad prid. Id. Aug. 1696, $3^{lib.}$

3 lib. 95. 210 gr. Quænam est Summa totalis? Resp. 131 lib. 63. 113 gr. = 29 $\frac{11}{102}$ dig. in Cylindro cujus Diameter erat 11 $\frac{4}{10}$ dig.

II. SUBDUCTIONIS.

8. Natus est *Gulielmus* III. Anno Domini 1650 prid. Non. Novembris. Quot igitur Annos natus erit prid. Non. Nov. An. D. 1698? Resp. 48.

9. Nata est *Anna* Principissa *Daniæ* Febr. 1664. Quot igitur Annos nata erit Febr. 1698? Resp. 34.

10. Natus est *Georgius* Princeps *Danicus* April. 1653. Quot Annos natus erit Apr. 1698? Resp. 45.

11. Condita est *Roma* juxta comp. *Varron.* Ann. Per. Jul. 3960; Natus est Christus Anno Per. Jul. 4714. Quot igitur Annis ante Christum natum juxta computum vulgarem condita est *Roma*? Resp. 754.

12. Numerabantur haud ita pridem (uti tum patebat ex Registro) in *Londino*, hoc est, intra ambitum *Tabellarum* quæ dicuntur *Mortalitatis*, domicilia 105315. Numerabantur item in *Lutetia Parisiorum* 23223 domicilia. Quisnam est Excessus domiciliorum *Londinensium*? Resp. 82092. *Vide Transact. Philosoph. N.* 185.

13. Numerus Incolarum in *Parisiis*, *Rothomago*, & *Roma* haud ita pridem habebatur 693055; in *Londino*, 695718. Quisnam est Excessus Incolarum *Londinensium*? Resp. 2663. *Vide Transact. Phil. N.* 185.

14. Sol percurrit Zodiacum 365 d. 5 h. 49′, Luna 454 d. 8 h. 48′. Quænam est utriusque Periodi differentia? Resp. 10 d. 21 h. 1′.

15. Summa Aquæ Pluvialis est 131 lib. 63. 113 gr. Decidebat autem mense Maii 20 lib. 13. 210 gr. Junii 15 lib. 73. 258 gr. Julii 23 lib. 113. 136 gr. Augusti 10 lib. 103. 192 gr. Quæ copia itaque cecidit Mensibus reliquis? Resp. 61 lib. 03. 277 gr. Ubi obiter notandum

tandum est majorem Aquæ copiam cecidisse in Mensibus 4 prædictis quam in reliquis 8 præcedentibus.

III. MULTIPLICATIONIS.

16. Quis Numerus per 4 divisus Quotum dabit 3? Resp. 12.

17. Cujus Numeri triens est 235? Resp. 705.

18. Sunt 50 Academici, quorum singulis Bursarius debet solvere 9l. 11s. 8d. 2q. Quænam est Summa totalis solvenda? Resp. 479l. 5s. 5d.

19. Valeat Modius Tritici 8s. 2d. Hordei 3s. 3d. Qualibet Hebdomade Academicus debet accipere, quantum valent unus Modius Tritici & duo Hordei. Quæritur Summa Valoris pro spatio semestri sive Hebd. 26. accipiendi. Resp. 19l. 1s. 4d.

20. Terræ Semidiameter mediocris à *Gallis* haud ita pridem mensurantibus definita est Pedum *Parisiensium* 19615800. & Lunæ Distantia mediocris à centro Terræ habetur Semidiametrorum terrestrium circiter 60. Quot igitur Pedum *Parisiensium* est? Resp. 1176948000. *Vide Newton Princ. Mathem. prop.* 19. & 4.

21. Lux spatium mille Diametrorum terrestrium tempore unius Minuti percurrit. Quot igitur Pedes *Paris.* eodem tempore percurrit? Resp. 392316000000. *Vide Clerici Physic. l.* 5. *c.* 7. §. 14.

22. Sol à Terra distare existimatur 5000 Diametris terrestribus. Quot igitur Pedibus *Paris.* distat? Resp. 19615800000000. *Vide Cler. Phys. l.* 1. *c.* 8. §. 6.

23. Circulus major cum cœlestis tum terrestris dispescitur in Gradus 360. Unusquisque autem Gradus æquatur Milliaribus *Anglicis* 69½ cum Perticis brevioribus 14. Quot igitur Milliarium *Anglicorum* est (Circulus major terrestris sive) Ambitus Orbis terraquei? Resp. 25035 mill. + 240 perp. i. e. 25036 fere.

¶ Sin-

¶ Singulæ Olympiades constant Cyclo Annorum 4, & Olympias prima celebrata est Anno P. J. 3938, Plenilunio Solstitium æstivum subsequente. Quare dato quolibet Anno Olympiaco, si Olympiades completæ ducantur in 4, & producto addatur Olympiadis currentis Annus datus, & deinde adjiciatur 3937; Summa erit Annus Per. Jul. Anno Olympiaco dato congruens, nempe à Plenilunio Solstitium æstivum subsequente:

24. Natus est *Aristoteles* Olymp. 99. an. 1. Quisnam Annus Per. Jul. Anno illi Olympiaco congrum? Resp. 4334. Hoc est, Anno P. J. 4334 Olympias 99. celebrata fuit, atque adeo Olymp. 99. an. 1. init. Unde sequitur, *Aristotelem* natum fuisse vel in parte posteriori Anni P. J. 4334, vel in priori Anni P. J. 4335, nempe ante Plenilunium prædictum:

25. *Socrates* sub finem Olympiadis 77. natus est, sub initium 95. mortuus. Quot igitur annos vixit? Resp. 68. circiter.

¶ Area cujusvis Parallelogrammi Rectanguli (sive Quadrati sive Oblongi) habetur, ductis invicem Longitudine & Latitudine: Ex. gr.

26. Asserculi lignei latitudo est ped. 2, longitudo 20. Quænam est ejusdem Area? Resp. 40 ped. quadr.:

27. Camera est pedes 18 longa, lata 12. Quænam est istius Area? Resp. 216 ped. quadr.:

28. Latus Pavimenti quadrati est pedum 15,7. Quænam est Area? Resp. 246,49. ped. quadr. i. e. 246½ fere:

29. Terræ Jugerum *Anglicanum* (vulgo an Acre) statura lege censetur instar Parallelogrammi Rectanguli perticas (breviores) 4 lati, longi 40. Quænam itaque est Area Jugeri *Anglicani*? Resp. 160 pertic. brev. quadr. Hinc si in Agro numerentur Jugera 100, quot

quot in eodem continebuntur Perticæ breviores quadratæ. Resp. 16000:

30. Sunt Agri quatuor, quorum singuli referunt figuram Parallelogrammi Rectanguli: primus autem est pert. brev. 60 longus, itemque latus; secundus est pert. brev. 90 longus, & 40 latus; tertius est pert. brev. 120 longus, latus autem 30; quartus est pert. brev. 180 longus, & latus 20. Quænam sunt Areæ singulorum? Resp. Sunt omnes invicem æquales, puta 3600 pert. brev. quadr.:

31. Muri erecti altitudo est ped. 14,5; longitudo, 20. Quænam est ipsius Area? Resp. 290 ped. qu.:

32. Est locus lapidibus consternendus, longus ped. 48,75; latus 36,2. Quot Lapides, quorum singulis est superficies unius pedis quadrati, requirantur? Resp. 1764,75.

¶ Area Trianguli Rectanguli Plani æquatur Producto ex binis Lateribus invicem perpendicularibus dimidiato:

33. Est Ager, qui refert ejusmodi Triangulum, cujus unum Latus perpendiculare est pert. brev. 32, alterum 15. Quænam est ejusdem Area? Resp. 240 pert. brev. quadr.

¶ Soliditas cujusvis Cubi itemq; Parallelepipedi habetur, ductis invicem trinis Dimensionibus, scilicet Longitudine, Latitudine, & Profunditate sive Crassitie; vel, quod eodem redit, inveniendo Aream Baseos, eamque ducendo in Altitudinem:

34. Est Cubus Saxeus sive Saxum cujus trinæ Dimensiones sunt æquales, nempe singulæ digitorum 12. Quænam est Soliditas istius Cubi? Resp. 1728 dig. cub.:

35. Est Trabs cujus longitudo est pedum 10, latitudo 1, itemque crassities 1. Quænam est istius Soliditas? Resp. 10 ped. cub.:

36. Est

36. Est Trabs, longa pedes 10, lata dig. 14, crassa dig. 11. Quænam est illius Soliditas? Resp. 18480 dig. cub.

37. Exstruendus est Murus, cujus longitudo debet esse pedum 100, latitudo 2, altitudo 30. Quot lateres, singuli pedem unum longi, lati ped. $\frac{1}{2}$ sive 15, alti ped. $\frac{1}{4}$ sive 125, Operi sufficient? Resp. 4800. Nempe hujusmodi lateres 100 secundùm longitudinem suam dispositi explebunt longitudinem Muri; lateres 4 secundùm latitudinem suam dispositi explebunt latitudinem Muri, denique lateres 120 invicem dispositi explebunt altitudinem Muri. Sed $100 \times 4 \times 120 = 48000$. Notandum vero est, quod in calculo non habeatur ratio spatii à calce, sive cemento lateribus intermixto occupati.

¶ Eodem artificio, quo reperitur Cubi aut Parallelepipedi Soliditas, potest etiam reperiri Capacitas Vasis alicujus, quod figuram Cubi aut Parallelepipedi refert.

38. Est Vas cujus singula latera interna (hoc est, cujus trinæ Dimensiones ad superficiem internam singulæ) sunt pedum 7. Quæritur Capacitas illius Vasis. Resp. 343 ped. cub.

39. Est Cisterna, longa pedes 8, lata 2, alta 4. Quot pedes cubicos aquæ continebit? Resp. 64.

¶ Semidiameter ducta in Semi-peripheriam exhibet Aream Circuli, sive (quo evitentur Fractiones) Productus ex Diametro & Peripheria quadrifecta est Area Circuli.

40. Sit Circuli diameter dig. 28, peripheria 88. Quænam est Area? Resp. 616 dig. qu.

¶ Diameter Sphæræ ducta in Peripheriam exhibet superficiem Sphæræ.

41. Est Sphæræ diameter dig. 28, peripheria 88. Quænam est Superficies? Resp. 2464 dig. qu.

¶ Soliditas Sphæræ producitur ex Superficie ducta in ſextantem Diametri, ſive trientem Semidiametri. Sive, ut evitentur Fractiones, Productus ex Semidiametro & Superficie triſectus exhibet Solliditatem Sphæræ.

42. Quænam igitur eſt Soliditas Sphæræ jam propoſitæ? Reſp. $11498\frac{2}{3}$ dig. cub.

43. In Quæſt. 23. compertum eſt Terræ peripheriam eſſe mill. *Angl.* 25036 fere. Eſt autem Terræ Diameter (uti infra conſtabit) 7966 mill. *Angl.* Quænam eſt ejuſdem Superficies ſive Area? Reſp. 199436776 mill. *Angl.* qu. *Refer ad Probl.* 41.

44. Cognita Terræ ſuperficie & diametro vel ſemidiametro, quænam eſt ipſius Soliditas? Reſp. $264785559602\frac{2}{3}$ mill. *Angl.* cub. *Refer ad Probl.* 42.

¶ Superficies curva Cylindri recti habetur ex peripheria Baſis ducta in Altitudinem.

45. Eſto peripheria baſis dig. 88, altitudo Cylindri 48. Quænam eſt ejuſdem Superficies (curva, h. e.) demptis utriuſque baſis Superficiebus? Reſp. 4224 dig. qu.

¶ Soliditas Cylindri habetur ex Baſi (i. e. Area Baſis) in Altitudinem ducta.

46. Quænam igitur eſt Soliditas Cylindri, cujus baſis eſt 616 dig. qu. & altitudo 48 dig.? Reſp. 29568 dig. cub.

¶ Coni recti Superficies curva producitur ex peripheria Baſis ducta in Semi-latus Coni.

47. Eſto peripheria baſis dig. 88, latus 48. Quænam eſt Coni Superficies? Reſp. 2112.

¶ Coni Soliditas producitur ex Baſi in trientem Altitudinis ducta.

48. Quænam igitur eſt Soliditas Coni, cujus baſis eſt 616 dig. qu. & altitudo 48 dig.? Reſp. 9856.

IV. DI-

IV. DIVISIONIS.

49. Quis est Numerus, qui in 4 ductus faciet 12? Resp. 3.

50. Cujus Numeri triplum est 705? Resp. 235.

51. Quot sunt Horæ (quarum singulæ continent 60′) in 1640′? Resp. 27 h. + 2′.

52. Est Summa 479 l. 5 s. 5 d. dividenda inter 50 Academicos. Quænam est cujusque portio? Resp. 9 l. 11 s. 8 d. 2 q.

53. Lunæ Distantia mediocris à Centro Terræ habetur Pedum *Parisiensium* circiter 1176948000. Quot igitur Milliarium est, posito quod Milliare sit mensura Pedum 5000? Resp. 235389⅗.

54. Terra altior est ad Æquatorem quam ad Polos, excessu Pedum *Paris.* 85200. Igitur quot Milliarium excessu altior est? Resp. 17 $\frac{2}{50}$. *Vide Newton. Princip. Math. l. 3, prop. 19.*

55. Sol à Terra distare existimatur Pedibus *Paris.* 19615800000000. Quot Milliaribus distat? Resp. 3923160000.

¶ Si, dato Anno Periodi Julianæ, Annum Olympiacum ei congruentem invenires, ex Anno dato subduc 3937, & Residuum divide per 4: Quotus Olympiadas elapsas, Residuus Annum currentis Olympiadis exhibebit: Ex. gr.

56. Quis Annus Olympiacus congruit U. C. Anno primo, sive Anno P. J. 3961 juxta computum *Varronianum*? Resp. Ol. 6. an. 4. Nempe, quoties post Divisionem factam nihil superest, inde constat, Anno dato P. J. Olympiadum Cyclum aliquem esse completum, h. e. Olympiadis currentis esse Annum quartum:

57. Quis Annus Olympiacus congruit A. D. 1698, quo hæc conscripta sunt, i. e. Anno P. J. 6411? Resp. Olymp. 618. ann. 2.

58. Asserculus ligneus continet 40 pedes quadratos. Est autem latitudo Asserculi ped. 2. Quænam igitur est ejusdem longitudo? Resp. 2)40=20.

59. Camera continet pedes quadratos 216. Ejus Cameræ longitudo est ped. 18. Quænam est ipsius latitudo? Resp. 18)216=12.

60. Asserculus ligneus est 8 digitos latus. Quæritur quam longus esse debet ut habeatur pes quadratus? Resp. 18 dig. Nempe 1 p. quadr. = 144 dig. & 8)144=18.

61. In Agro parallelogrammo, cujus latitudo est pert. brev. 8, quæritur quanta debet esse longitudo, ut habeatur Jugerum Terræ? Resp. 20 pert. brev. Nempe 1 jug. = 160 pert. br. qu. & 8)160=20.

62. Planities Cameræ pedes 12 lata, longa 20, tegenda est Asserculis ligneis pedem unum latis, & longis pedes 10. Quæritur quot Asserculi ejusmodi Operi sufficient? Resp. 24. Nempe planities Cameræ continet pedes 12×20, hoc est, 240 ped. qu. Quare, cum latitudo Asserculi cujusque sit tantum ped. 1, & 1)240=240; requiritur ut Asserculorum omnium longitudo sit ped. 240. Sunt autem Asserculi singuli pedes 10 longi, & 10)240=24. Ergo patet 24 Asserculos, singulos ped. 10 longos, adæquare longitudinem requisitam.

63. Est Camera, cujus longitudo est ped. 16, latitudo 14, altitudo 12. Quanta longitudo panni Ulnam brevem (Anglice Yard) sive pedes 3 lati Muris istius Cameræ tegendis sufficiet? Resp. 240 ped. i. e. 80 Ulnæ brev. sive Yards.

64. Tapeti holoserici longæ pedes 24, latæ 8, assuendus est a tergo pannus vilior uln. br. 2. sive ped. 6 latus. Quanta longitudo panni Operi sufficiet? Resp. 32 ped. sive $10\frac{2}{3}$ uln. brev.

65. Cisternæ capacitas est ped. cub. 64, longitudo

ped.

ped. 8, latitudo ped. 2. Quænam est ejusdem Altitudo? Resp. 4 ped. Nempe 8 × 2 × 4 = 64.

66. Desideratur Cisterna quæ continebit 10 pedes cubicos (h. e. 79 Gallones, & paulo plus) Aquæ. Locus autem in quo collocanda est Cisterna, non sinit ut latitudo ejus excuperet pedem unum, longitudo pedes 4. Igitur quam alta debet esse Cisterna, ut capax sit Aquæ prædictæ? Resp. $2\frac{1}{2}$ ped.

V. Involutionis & Evolutionis.

67. Milliare *Anglicanum* est mensura pedum *Angl.* 5280. Ergo Milliare quadratum quot pedes quadratos continet? Resp. 5280 × 5280, h. e. 27878400. Hujusmodi vero spatium continebit 13939200 homines, si singulis assignetur spatium duorum pedum quadratorum; quòd si assignetur singulis hominibus spatium trium pedum quadratorum, continebit homines 9292800.

68. Ponamus cum *Tacqueto* hæc tria; 1mo, Mundum duraturum esse annos 10000; 2do, Numerum hominum simul viventium esse mille milliones; 3^tio, Singulis 50 annis totum genus humanum innovari adæquate, seu mille milliones hominum è vita decedere. Unde sequitur Numerum omnium Hominum usquam terrarum à Mundi primordiis ad ejusdem exitum natorum fore 200000,000000. Jam vero sive 2 sive 3 pedes quadrati singulis hominibus assignentur, patebit 150 Milliaria *Anglica* quadrata continere posse universam illam Hominum turbam. Quæratur enim quot pedes quadrati sint in 150 Milliaribus quadratis? Resp. 627264000000. At 200000,000000 homines occupabunt tantum 400000,000000 pedes quadratos, si singulis assignentur 2 pedes quadrati; tantum 600000,000000, si 3.

69. Mil-

69. Milliare Cubicum quot pedes cubicos continet? Resp. 5280×5280×5280, h. e. 147197952000.

70. Rursus ponatur uti prius totam gentem humanam fore 200000,000000, & singulos homines in terræ superficie occupare spatium 2 vel 3 pedum quadratorum. Porro autem singulis concedatur altitudo 6 pedum; unde sequetur, totam unius corporis humani molem occupare 12 vel 18 pedes cubicos; adeoque 200000,000000 homines occupare 2400000,000000, vel 3,600000,000000 pedes cubicos. Patebit ergo spatium 3 Milliarium Cubicorum continere posse totam humani generis molem. Quæratur enim quot Pedes Cubici sint in 3 Mill. Cubicis? Resp. 3974344704000. Unde obiter liquet, carcerem infernum, si in Terræ visceribus collocetur, uti nonnullis placet, exiguam omnino terreni Orbis portiunculam esse posse.

71. Sunt Milites 3481 in Aciem quadratam disponendi. Quot Milites esse debent cujusque Ordinis tam in longum quam in latum, Anglice in Rank and File? Hoc est, quodnam est Latus Quadrati 3481? Resp. 59.

72. Sunt Milites 4050 in Aciem ita constituendi, ut Aciei longitudo sit dupla latitudinis. Quot Milites constitui debent in longum, quot in latum? Resp. 45 in latum, ac proinde 90 in longum. Nempe in hoc Casu Regula generalis esto, $\sqrt{\frac{\text{Num. dat.}}{2}} =$ lat. min. & hujus duplum est latus majus. Pari ratione, si postuletur ut Aciei latus unum sit alterius quadruplum, $\sqrt{\frac{\text{N. dat.}}{4}} =$ lat. min. & hujus quadruplum est latus majus.

73. Velim Sepimento includere portionem terræ quadratam

quadratam quæ continebit perticas breves quadratas 2209. Quam longum esse debet quodvis Septimenti latus? Resp. 47 pert. brev.

74. Est Area quadrata quæ continet pedes quadratos 100. Velim habere Aream quadruplo majorem; quodnam igitur erit Latus Areæ quadratæ quadruplo majoris. Resp. 20 ped. Nempe $\sqrt{100 \times 4} = \sqrt{400} = 20$. Ubi obiter vides, Lateris duplum in se ductum efficere quadruplum Areæ.

75. Altitudo Muri est pedum 30, & Latitudo fossæ Murum ambientis est pedum 40. Quam longa debet esse Scala, ut ab exteriori margine Fossæ ad summitatem Muri pertingat? Resp. 50 ped. Nempe $30q + 40q = 2500$. Et $\sqrt{2500} = 50$. Vel sic universim $\sqrt{}$: alt. Muri qu. + lat. Fossæ qu. = long. Scalæ. Et sic in Casibus similibus.

¶ Area Trianguli cujusvis plani haberi potest hunc ad modum: A Semi-summa trium Laterum subducantur Latera singula: Differentiæ tres inde ortæ in se invicem continuo ducantur, & deinde in Semi-summam. Radix quadratica Producti ultimi est Area Trianguli: Ex. gr.

76. Est Ager triangularis, cujus latus unum est pert. brev. 15, alterum 14, tertium 13. Quænam est Area istius Agri? Resp. 84 pert. brev. quadr.:

77. *Anglia* est figuræ triangularis, cujus latus Orientale nempe à *Berovico* ad *Dubrim*, habetur mill. *Angl.* 250; latus Meridionale à *Dubri* ad Promontorium vulgo dictum Lands-end, mill. 270; latus Occidentale à Promontorio illo ad *Berovicum* mill. 330, omissis scilicet littorum anfractibus. Scire igitur velim quot Milliaria quadrata ac proinde quot Pedes quadrati continentur intra *Angliæ* limites? Resp. 35093,38 mill. qu. & 922590484992 ped. qu. Unde patet (collatis

latis invicem Qu. 67 & 68.) *Angliam* complecti poſſe univerſam gentem humanam a Mundi primordio ad ejuſdem exitum.

¶ Cognita ratione inveniendi Aream cujuſvis *Trianguli plani*, non erit difficile invenire Aream Figuræ cujuſvis planæ, (puta, Baſin Priſmatis aut Pyramidis, &c.) cum nulla ſit, quæ in aliquot Triangula diſtribui non poteſt. Porro Baſis Priſmatis ſic inventa, & deinde ducta in Altitudinem, dabit Soliditatem Priſmatis. Item Baſis Pyramidis ſic inventa, & deinde ducta in trientem Altitudinis, dabit Soliditatem Pyramidis. Quare

78. Eſto Priſma, cujus Baſis (i. e. Area Baſeos) jam inventa eſt $7\frac{1}{2}$ ped. qu. Altitudo autem eſt pedum 37. Quænam eſt ipſius Soliditas? Reſp. 277,5 ped. cub.

79. Eſto Pyramis, cujus Baſis eſt ped. qu. $9\frac{1}{4}$. Altitudo 14,25. Quænam eſt ipſius Soliditas? Reſp. 43,9375 ped. cub.

NB. Area Ellipſeos habetur, ductis invicem binis Diametris, & evoluta Producti Radice Quadratica, quæ ſemper erit Diameter Circuli Ellipſi datæ æqualis.

VI. PROPORTIONIS.

80. Minuta unius Horæ ſunt 60. Quot ſunt igitur Minuta ὡρῶν ſive Horarum 24? Reſp. 1440. Nempe 1 : 60 :: 24 : 1440.

81. In uno Milliari *Anglicano* ſunt Pedes *Angl.* 5280. Quot igitur Pedes ſunt in Milliaribus 25036 ſive ambitu Terræ? Reſp. 132190080.

82. Singulis Minutis Cor abſolvit pulſationes 75. Quot abſolvit ſingulis Horis ſecundum hanc rationem? Reſp. 4500. Nempe 1′ . 75 :: 60′ . 4500. *Vide Tranſact. Philoſoph. N.* 191.

83. Rur-

83. Rursus compertum est 4 Uncias (Aberdupois) Sanguinis, singulis Diastolis in Cor humanum admitti. Quot transmittentur singulis Horis sive 4500 Diastolis? Resp. 18000. *Vide ibid.*

¶ Porro supponitur Sanguinem humanum eandem circiter servare rationem cum pondere Hominis, quæ inter pondus & sanguinem aliorum animalium observata est, nempe esse quasi vigesimam ponderis partem; ita ut in Homine 160 lib. sanguis æquet 8 lib. sive 128 uncias;

84. Qua supputatione admissa, totius Sanguinis quantitas quo temporis intervallo Cor illius Hominis pertransibit? Resp. Intervallo quasi Semi-minuti sive 30″. Nempe 18000 unc. 60″ :: 128 unc. $\frac{60 \times 128}{18000} = \frac{32}{75}$ id est, quasi $\frac{1}{2}$ Minuti. *Vide ibid.*

85. Sonus progrediendo conficit Pedes *Anglicos* 968 tempore Minuti unius secundi. Quot conficit tempore unius Minuti primi? Resp. 58080 i. e. Mill. *Angl.* 11. *Vide Newtoni Princ. Math. l. 2. prop. 50. Schol.*

¶ Quam rationem habet 7 ad 22, (vel 113 ad 355, vel adhuc accuratius 1 ad 3.1415926,) eandem habet Circuli diameter ad peripheriam. Et vicissim, ut 22 ad 7, vel 355 ad 113, vel 3.1415926 ad 1, sic peripheria ad diametrum:

86. Circuli diameter est 28 dig. Quænam est peripheria? Resp. 88 dig. Et contra, peripheria est 88, quænam est diameter? Resp. 28. Item cum in Probl. 23. compertum sit Ambitum Orbis terraquei esse Mill. *Angl.* 25036 fere. Quænam est ejusdem Diameter? Resp. 7966 mill. *Angl.*

NB. Visum est heic loci adjungere nonnullas alias Proportiones, quæ ad mensurationem Circuli & Sphæræ jam in Problematibus Multiplicationis tra-

ditum pariter ſpectantes, quaſi in Examen viſtarum Operationum adhiberi poſſunt, ſaltem à Tyronibus Regulam Auream exercitandi gratia. Ubi notandum eſt, quod brevitatis cauſâ D denotat Diametrum, P Peripheriam, R Radium ſive Semi-diametrum, Dq Diametri quadratum, &c.

Ut 14 : 11 (vel 1 : ,785399) : : ſic Dq : ad Aream Circuli. Et contra, ut 11 : 14 : : ſic Area Circuli : ad Dq.

Ut 88 : 7 (vel 1 : ,079577) : : ſic Pq : ad Aream Circuli. Et contra.

Ut 1 : ,707107 : : ſic D : ad Radicem Quadrati Circulo inſcribendi.

Ut 1 : ,886227 : : ſic D : ad Radicem Quadrati æquantis Aream Circuli. Et hæc dicitur Quadratura Circuli.

Ut 7 : 22 (&c.) : : ſic Dq : ad Superficiem Sphæræ. Et contra.

Ut 1 : 1,772454 : : ſic D : ad Radicem Quadrati æquantis Superficiem Sphæræ.

Ut 1 : ,564189 : : ſic R : ad Radicem Quadrati æquantis Superficiem Sphæræ.

Ut 1 : ,80604 : : ſic D : ad Radicem Cubi æquantis Sphæram.

Ut 7 : 6 : 22 (vel 1 : ,5236) : : ſic Dc : ad Solliditatem Sphæræ. Et contra.

Ut 1 : ,256556 : : ſic R : ad Radicem Cubi æquantis Sphæram.

Ut 1 : ,016887 : : ſic Pc : ad Sphæram.

§ Pondera Globorum tormentariorum ejuſdem metalli ſunt ut Cubi Diametrorum. Et viciſſim, Cubi Diametrorum ſunt ut Pondera. Compertum vero eſt, globum ferreum, cujus diameter eſt dig. 4, æquare pondus librarum 9 : :

87. Quodnam igitur eſt pondus globi ferrei, cujus diameter eſt dig. 6? Reſp. $30\frac{6}{16}$ lib. :

88. Vi-

88. Viciſſim, velim habere globum ferreum libras 30 æquantem. Quænam debet eſſe diameter? Reſp. √c 210.

¶ Ut Radius unius Rotæ dentatæ ad Radium alterius, ita numerus Dentium unius ad numerum Dentium alterius:

89. Eſt igitur Rota dentibus 60 inſtructa, & cujus Radius eſt dig. 15. Fabricari velim Rotam alteram, cujus Radius erit dig. 10, & cujus dentes apte congruent dentibus Rotæ prioris. Quot eſſe debent hujus Dentes? Reſp. 40.

¶ Spatia decurſa à Corporibus gravibus ſunt in duplicata ratione (ſive ut Quadrata) Temporum:

90. Quare cum compertum ſit Corpora gravia non longe à terræ ſuperficie diſſita tempore unius Minuti Secundi deſcendendo conficere pedes 16, quot conficient tempore duorum Minut. Secund.? Reſp. 64.

¶ Tempora ſunt in dimidiata ratione (ſive ut Radices) ſpatiorum:

91. Quare ſi Corpus grave deſcendendo conficiat pedes 16 tempore Minuti unius Secundi, quo tempore conficiet pedes 64? Reſp. 2″.

¶ Longitudines Pendulorum ſunt ut Quadrata Oſcillationum reciproce. Et viciſſim:

92. Quare cum pro comperto habeatur Pendulum digitorum *Angl.* 39,2 longum tempore Minuti unius Secundi oſcillari, h. e. oſcillationes 60 tempore unius Minuti abſolvere; quanta debet eſſe longitudo Penduli, quod oſcillabitur 50as tempore unius Minuti? Reſp. 56,4 dig. *Angl.* Nempe 3600 : 39,2 :: 2500 : 56,4 circiter:

93. Et viciſſim, Scire velis quoties oſcillabitur tempore Minuti unius Secundi Pendulum dig. 56,4 longum; Reſp. 50as. Nempe 39,2 : 3600 :: 56,4 : 250,2. Et √ 250,2 = 50 & paulo plus.

NB. Quia in hujuſmodi Quæſtionibus univerſis Dividendus erit (3600 × 39,2 =) 141120; hinc ſi numerus 141120 per quadratum Oſcillationum datarum dividatur, prodibit longitudo Penduli quæſita; aut viciſſim, ſi per longitudinem datam, prodibit quadratum Oſcillationum. Puta 2500) 141120 (56,4. Et 56,4) 141120 (250,2. Et √ 250,2 = 50 & paulo plus.

94. Compertum eſt Undas, quæ pedes *Pariſienſes* $3\frac{1}{18}$ latæ ſunt, tempore Minuti unius Secundi progrediendo conficere latitudinem ſuam. Igitur tempore Minuti unius primi quot pedes percurrent? Reſp. $183\frac{1}{3}$. *Vide Newton Princ. Math. l. 2. prop. 46. Cor. 1.*

95. Rurſus, ſi Undæ pedes *Par.* $3\frac{1}{18}$ latæ tempore Minuti unius primi progrediendo conficiunt pedes $183\frac{1}{3}$. Quot pedes percurrent ſpatio Horæ? Reſp. 11000 quam proxime. *Vide ibid.*

96. Porro Undarum velocitas eſt in dimidiata ratione latitudinum. Hinc ſi Undæ pedes *Pariſ.* $3\frac{1}{18}$ latæ ſpatio Horæ percurrent 11000 pedes: Quot pedes eodem ſpatio percurrent Undæ ped. $6\frac{2}{18}$ latæ? Reſp. 16500.

VII. PROGRESSIONIS.

Primo *Arithmeticæ*.

97. Cum notum ſit, Horologium hora poſt Meridiem prima ſonitum 1 edere, ſecunda 2, tertia 3, &c. Qr. quot edit ſonitus, 12 proxime ſuccedentium horarum ſpatio? Reſp. 78. Nempe per §. 14. Cap. XI. ſive per *Prop.* 1. *Oughtred.* viz. $T\omega + T\alpha = 2Z$. Ubi notandum eſt, quod α denotet Terminum primum minimum, ω ultimum maximum, T numerum Terminorum.

98. Rurſus, ſi Horologium hora poſt Meridiem prima ſonitum 1 edat, duodecima 12. Quiſnam eſt Com-

Communis Excessus sive Differentia? Resp. 1. viz. per *Prop.* 2. *Oughtred.* $\frac{\omega - \alpha}{T - 1} = X$.

99. Siquis iter conficiens, ambulaverit primo die 3 Milliaria, secundo 5, tertio 7, &c. Qr quoto itineris die ambulaverit 15 Milliaria? Resp. 7. Nempe per *Prop.* 3. *Oughtred.* $\frac{\omega - \alpha}{X} + 1 = T$.

100. Rursus, quot Milliaria ambulaturus est die decimo? Resp. 21. Nempe per *Prop.* 7. *Oughtred.* $TX - X + \alpha = \omega$.

101. Ponamus 20 Lapides ita collocatos, ut primus absit una pertica, 2^{dus} duabus, 3^{tius} tribus, &c. Quæritur quot Milliaria confecturus sit is, qui hos omnes lapides sigillatim afferre debet, priusquam omnes attulerit? Resp. 420. Nempe dum affertur lapis primus, eundo & redeundo conficiuntur duo Milliaria; dum secundus, quatuor; dum tertius, 6; &c. Adeoque $2 = \alpha$, & $2 = X$, & $20 = T$. Sed per *Prop.* 8. *Oughtred.* $TX - X + 2\alpha$ in $T = 2Z$.

Secundo *Geometricæ.*

102. Sint in Equi cujusdam Calceis singulis sex Clavi, adeoque in omnibus 24. Et vænum expositus sit Equus, ea lege, ut Emptor pro primo Clavo Quadrantem solvat, pro secundo duos, pro tertio 4, & sic deinceps, singulorum Clavorum pretium continue duplando. Qr quanti emendus est Equus? Resp. 16777215. Nempe per §. XVIII. Cap. XI.

103. Siquis Servum conduxerit in Annum integrum, ea lege, ut prima Septimana accipiat Quadrantem, secunda duos, tertia 4, & sic deinceps. Quæritur quantam habiturus sit Servus mercedem Anno integro sive Septimanis 52? Resp. 4503599627370495. Nempe per §. XVIII. Cap. XI.

VIII. Æ-

VIII. ÆQUATIONIS.

Primò Simplicis ſive Puræ.

104. Onus Mulæ ita ſe habet ad Onus Aſinæ, ut ſi pondus unius (ſive b) libræ oneri Mulæ demptum adjiciatur oneri Aſinæ, Onus utriuſque erit invicem æquale. Sin contra, pondus 1 lib. oneri Aſinæ demptum adjiciatur oneri Mulæ, hoc fiet illius duplum. Qr Onus utriuſque? Reſp. Onus Aſinæ eſt 5 lib. Mulæ 7 lib. Nempe ſi ſtatuatur a onus Aſinæ, erit ex hyp. $a+b=$ on. Mulæ, quod idcirco erat $=a+2b$. Sed rurſus ex hyp. $a+3b=2a-2b$. Unde per Reductionem emerget $a=5b$, ac proinde erit onus Mulæ $=7b$.

105. Eſt Ciſternæ duplex Fiſtula. Una Ciſternam implebit horis 20 ſive b, altera horis 30 ſive c. Quoto tempore utraque ſimul implebit Ciſternam? Reſp. 12. Nempe Numerus quæſitus ſtatuatur a. Erit $b:1::a:\frac{a}{b}$, & $c:1::a:\frac{a}{c}$. Sed ex hyp. $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}=1$. Unde per Reductionem prodibit demum $a=\frac{bc}{b+c}=12$.

106. Viciſſim, ſi utraque Fiſtula ſimul impleat Ciſternam horis 12 ſive b, & ſola major horis 20 ſive c. Quoto tempore ſola minor eandem implebit? Reſp. 30. Nempe N. qu. ſit a. Erit $a:1::b:\frac{b}{a}$, & $c:1::b:\frac{b}{c}$. Sed ex hyp. $\frac{b}{a}+\frac{b}{c}=1$. Unde per Reductionem reperietur tandem $a=\frac{bc}{c-b}=30$.

107. Sunt Horologio bini Indices, quorum unus circumvolvitur unius (ſive b) diei ſpatio, alter nonniſi

nisi spatio dierum 3 sive c. Qr quoto tempore uterq; Index ab eodem puncto simul progressus iterum conjungetur? Resp. $1\frac{1}{2}$ diei spatio. Nempe Tempus quæsitum sit a. Erit $b:1::a:\frac{a}{b}$, & $c:1::a:\frac{a}{c}$. Sed $\frac{a}{b}-\frac{a}{c}=1$. Unde per Reductionem invenietur tandem $a=\frac{bc}{c-b}=1\frac{1}{2}$.

108. Pari ratione investigari potest Conjunctio duorum quorumvis Planetarum. V. g. Sol percurrit Zodiacum spatio (365 d. 5 h. 49′ i. e.) 525949′; & Luna eundem percurrit spatio (27 d. 7 h. 43′ sive) 39343′; Postulatur, quoto tempore fiet Synodus sive Conjunctio Lunæ cum Solæ, utroque Luminari ab eodem puncto Zodiaci simul progresso. Resp. Spatio 29 d. 12 h. 47′ circiter. Nempe si statuatur $b=39343$, & $c=525949$, & $a=$ N. qu. Erit ut prius $a=\frac{bc}{c-b}=29$ d. 12 h. 47′ circiter.

109. Ab *Oxonia* ad *Cantabrigiam* numerantur rotunde 50 Milliaria. Academicus *Oxonienſis Cantabrigiam*, *Cantabrigienſis Oxoniam* petit, uterque eodem temporis articulo iter incipiens. Prior autem qualibet Hora conficit 3 Milliaria; posterior, 2 Milliaria. Qr quot ab initio itineris Horis elapsis sibi invicem occurrent, & quot Milliaria uterque sigillatim perfecerit. Resp. Elapsis Horis 10, adeoque confectis ab *Oxonienſi* Milliaribus 30, à *Cantabrigienſi* 20.

110. Dux bellicus dum exercitum suum in Aciem Quadratam disponit, supersunt ipsi Milites 284. At cum singulas Lineas uno Milite auxerit, (h. e. cum Latus Quadrati Unitate majus constituerit,) desunt ipsi

ipſi ad explendum Quadratum Milites 25. Qr quot Milites habuerit? Reſp. 24000.

111. Dux quidem emittit $\frac{1}{3}$ ſuorum Militum + 10, reſtant ipſi $\frac{1}{3}$ + 15. Quæritur quot Milites habuerit? Reſp. 150.

112. Eſt Exercitus, cui ſi addatur ſui $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$, — 5000, Summa erit 100000. Quæritur numerus Militum iſtius Exercitus. Reſp. 36000.

113. Quidam conducit Operarium, ea conditione, ut ſingulis diebus, quibus operi inſtiterit, accipiat 12 Denarios; ſed quibus otiatus fuerit, mulctetur 8 Denariis. Elapſis autem diebus 390 neuter alteri quicquam debet. Qr quot diebus fuerit operatus, quot otiatus? Reſp. Operatus eſt 156 d, otiatus 234 d.

114. Quidam interrogatus, quot Annos natus eſſet, reſpondit: Si Annorum meorum $\frac{2}{3}$ quadruplentur, & Facto addatur $\frac{1}{2}$ eorundem + 50. Summa in tantum ſupra 100 excreſcet, quantum nunc infra 100 ſubſidit Annorum meorum numerus. Erat igitur Annorum numerus 36.

115. Rogatus quidam, quota Diei Hora eſſet, reſpondit: A meridie ad mediam noctem recenſentur 12 Horæ: Quod ſi $\frac{1}{3}$ Horarum à meridie elapſarum addantur $\frac{2}{3}$ reſiduarum ad mediam noctem, prodibit Hora quæſita. Erat igitur Hora pomeridiana $6\frac{6}{7}$.

116. Viator conficit ſingulis diebus Milliaria 6; poſt 8 dies inſequitur hunc alius, qui ſingulis diebus conficit 10 Milliaria. Quæritur quoto die priorem aſſequetur. Reſp. 12.

117. Quidam emit duos Equos diverſi pretii, cum Ephippio conſtante 5 Minis: Si Ephippium imponatur Equo viliori, uterque æqualis pretii cenſebitur; ſin imponatur alteri Equo, hic priori erit duplo pretioſior. Quæritur quanti uterque Equorum conſtiterit. Reſp. Equus vilior conſtabat 10 l, adeoq; Equus præſtantior conſtabat 15 l.

118. Præ-

118. Præteuntibus Militum tribus Cohortibus, prima aufert Paſtori gregis totius, ac unius inſuper Ovis, dimidium: Secunda aufert dimidium gregis reliqui, atque etiam unius inſuper ovis: Itidem tertia aufert gregis adhuc reſidui dimidium, una cum dimidio unius inſuper ovis. Neque interim mactata eſt ovis aliqua; ſed ſuperſunt tandem Paſtori oves 20 integræ. Qr numerus omnium Ovium. Reſp. 167.

119. Detur Quadratum in 9 Quadratula diſtinctum. Oportet invenire ac diſponere Numeros per ſingulas Areolas, ita ut Summa cujuſque ordinis ternarii, ſive lateraliter ſive diagonaliter connumerando, ſit ſemper 15:

Hujuſce Probl. Solutionem ab eruditio Viro mihi communicatam heic loci Tyronum in gratiam deſcribere viſum eſt: Viz. Statuantur in 9 Areolis novem Literæ, hunc ad modum:

a	b	c
d	e	f
g	h	k

Ergo ex hypotheſi
1. $a+b+c=15$
2. $d+e+f=15$
3. $g+h+k=15$
4. $a+d+g=15$
5. $b+e+h=15$
6. $c+f+k=15$
7. $a+e+k=15$
8. $c+e+g=15$.

9. Quare per 5. $b+h=15-e$
10. per 1 + 3. $a+c+b+h+g+k=30$
11. per 7 + 8. $a+c+2e+g+k=30$.
12. Ergo per 9, 10 & 11. $2e=b+h=15-e$.
13. Ergo per 12. $3e=15$, adeoque $e=5$.
14. Ergo ex hyp. & per 13 $\left.\begin{matrix}a+k=b+h=c+g=d+f=2e=10\end{matrix}\right.$

Igitur Numeri quæsiti sunt in continua Proportione Arithmetica, & e est Terminus medius; qui cum sit = 5, reliqui continue proportionales sint necesse est, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. Ut vero inveniantur sedes singulis hisce digitis (præter 5, cujus sedes jam cognita est) propriæ, sic procedat praxis:

Ex hyp. $a+b+c=15$
& $b+d+g=15$

15. Ergo $2a+b+d+e+g=30$
Sed per 14. $e+g=10$

16. Ergo per 14 & 15. $2a+b+d=20$
17. Et per 13. $2a+2k=20$

18. Ergo per 16 & 17. $b+d=2k$

Et pari ratiocinio invenientur etiam
$b+f=2g$
$d+b=2c$
$f+b=2a$.

Quare Digitus nullus in angulo quovis constituendus potest esse 1, quia tum $b+d$, $b+f$, $d+h$, vel $f+b=2$, quod ex hypothesi fieri nequit. Imo quia Summa Digitorum in angulis diagonaliter oppositis debet esse 10, Digiti in angulis singulis constituendi debent esse Numeri pares, adeoque 2, 4, 6, 8. Viz.

2		4
	5	
6		8

Quare in aperto sunt sedes Digitorum reliquorum, puta 1, 3, 7, & 9. Nempe inter Digitos illos angulares, quibuscum singuli constituunt 15; ut in Schemate appositio:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Secundo, Æquationis Affectæ Quadraticæ.

120. Quæritur Numerus, quo multiplicato per 8 sive b, Productoque addito ad Quadratum ipsius Numeri quæsiti, Aggregatum fit 660 sive d. Resp. 22.

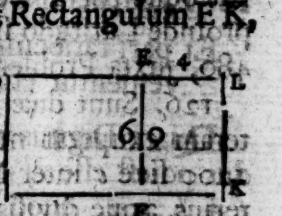
Nempe

Nempe ſit a = N. q. Ergo $aa + ba = d$. Ergo per Theorema Formulæ primæ, $a = 22$.

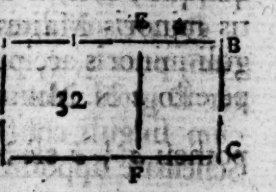
121. Poſtulatur Numerus, quo multiplicato per 6 ſive b, Productoque ſubducto ex Quadrato ipſius Numeri inveniendi, Reſiduus erit 72. Nempe ſit N. q. $= a$. Ergo $aa - ba = d$. Ergo per Theorema Formulæ ſecundæ, $a = 12$.

122. Poſtulatur dividere Numerum 140 ſive b in duas partes, quarum Productus æquabitur (Quadrato Numeri 56, h. e.) 3136 ſive d. Sit pars una $= a$. Ergo pars altera $= b - a$. Sed ex hyp. $ba - aa = d$. Ergo per Theorema Formulæ tertiæ, $a = 112$ vel 28. Et hæ ſunt partes quæſitæ. Nam $112 \times 28 = 3136$.

123. Quadrato D F additum eſt Rectangulum E K, cujus latitudo E L = 4 ſive b, necnon Area totius Rectanguli compoſiti D K = 60 ſive d. Qr Latus Quadrati? Reſp. 6. Nempe ſtatuatur latus Quadrati $= a$. Ergo Quadratum $= aa$, & Rectangulum E K $= ba$. Sed ex hypotheſi $aa + ba =$ (Rect. D K $=$) d. Ergo per Reductionem, $a = 60$.



124. Sit Hortus rectangularis A B C D, cujus longitudo A B tripla exiſtit latitudinis A D. Porro numeratis à B verſus A perticis 4 ſive b, h. e. B E, ductaque E F parallela ipſi A D, detur Area reliqui Rectanguli E D 32 (ſive d) perticarum quadratarum, Qr dicti Horti longitudo & latitudo. Reſp. 12 & 4. Nempe ſit longitudo $= a$, Ergo ex hyp. latitudo $= \frac{a}{3}$. Sed ex hypoth.



$a \times \frac{a}{3} = (DA \times AB = DA \times AE$ plus $EF \times EB =) d + b \times \frac{a}{3}$. Ergo per Reductionem $aa - ba = 3d$. Quare per Theorema Formulæ ſecundæ, $a = 12$, adeoque latitudo $= 4$.

125. Sint Milites 480 in Aciem oblongam diſponendi, ita ut ſumma laterum majoris & minoris ſit 52. Qr numerus Militum cujuſque ordinis in longum & latum. Reſp. Long. $= 40$, Lat. $= 12$. Eſto enim Longitudo Aciei $= a$, $b = 52$, $d = 480$. Ergo Latitudo Aciei $= b - a$. Ergo Acies $d = ba - aa$. Adeoque per Theorema Formulæ tertiæ, $a = 40$. Et proinde Latitudo ſive $b - a = 12$. Nempe $40 \times 12 = 480$, juxta Problematis exigentiam.

126. Sunt duæ Militum Cohortes, quarum una alteram exuperat numero Militum 40 ſive b. Aureis 1200 ſive c inter Milites Cohortis unius, itemque alterius, æque diviſis, evenit ut unuſquiſque Miles Cohortis minoris tot habeat Aureos, quot habet unuſquiſque Miles Cohortis majoris, ac inſuper 5 ſive d. Qr Numerus Militum tam in hac quam in illa Cohorte, atque etiam Numerus Aureorum, quos unuſquiſque Miles in utraque ſortitus eſt. Reſp. Cohortis minoris Milites ſunt 80, majoris 120. Item ſinguli minoris accipiunt Aureos 15, majoris 10. Nempe eſto a N. Militum Cohortis minoris. Ergo ex hypotheſi $a + b$ eſt Num. Militum majoris. Quare $\frac{c}{a}$ eſt portio cujuſque Militis Cohortis minoris, & $\frac{c}{a+b}$ majoris. Sed ex hyp. $\frac{c}{a+b} + d = \frac{c}{a}$. Unde eveniet tandem

tandem $aa + ba = \frac{bc}{a}$. Quare per Theorema Formulæ primæ $a = 80$. Et hinc cætera facile deduci possunt.

127. Sint Milites 600 (sive d) in Aciem oblongam dispositi, quam dum Colonellus latiorem cupit, deprehendit, si Longitudini 10 (sive b) ordines adimat, Latitudini 2 (sive c) ordines accrescere. Quæritur Numerus Militum per singulos ordines in longum & latum. Resp. Longitudo $= 60$, & Latitudo $= 10$. Nempe sit Long. $= a$, Ergo Lat. $= \frac{d}{a}$. Sed ex hyp. $a - b : \times \frac{d}{a} + c :: = a \times \frac{d}{a} = d$. Unde per Reductionem $a^2 - ba = db$. Quare per Theorema Formulæ secundæ, $a = 60$, adeoque Latitudo $= \frac{d}{a} = 10$. Nam $60 \times 10 = 50 \times 12 = 600$, uti in Problemate erat postulatum.

Tertio, Affectæ Cubicæ, Biquadraticæ, &c.

Ad exercendam solutionem Æquationum Affectarum Cubicarum, Biquadraticarum, &c. adhiberi possunt Exempla XVI *Oughtrediana* in Tractatu de Æquationum Affectarum Resolutione ad calcem *Clav. Math.* Quibus addi possunt Problemata quotvis *Raphsoniana*; speciatim hæc tria ad tres Formulas Æquationum Cubicarum spectantia, viz. $a^3 + 24a = 587914$, adeoque $a = 83{,}677607$. Item $a^3 - 2a = 5$, adeoque $a = 2{,}094551481542710414 16$. Item $77284a - a^3 = 8083128$, adeoque $a = 179{,}797652$. Denique ultimo loco addi potest Æquatio illa, quam in Resolutione difficillimi Problematis Arithmetici adhibet Cl. *Wallisius* Cap. LXII *Algebræ* suæ, ubi Radicem

Vietæ

Vietæ methodo accuratiſſime quidem aſſecutus eſt; quam etiam in Exemplum methodi ſuæ affert uterque & Cl. *Halley* & D^s *Raphſon*; hic pag. 25, 26 *Analyſis Æquationum univerſalis* An. Dom. 1690 editæ, ille pag. 146. N. 210. *Tranſact. Philoſ.* Eſt autem Æquatio hæc, viz. $-a^4+80a^3-1998a^2+14937a=5000$, ſeu (quod tantundem eſt juxta methodum *Halleian.*) $z^4-80z^3+1998z^2-14937z+5000=0$. Invenietur tandem $a=12,75644179448074402$.

NOTÆ.

NB. Quotquot Problemata proxime ſuccedentia terminantur Notationis puncto [:] quod dici ſolet Colon, illa omnia intelligenda ſunt ſpectare ad unam eandemque Regulam communem de adminiſtranda eorum praxi præmiſſam. Sic utrumque Problema tam 24um quam 25um ſpectat ad Regulam proxime præmiſſam, viz. *Singulæ Olympiades*, &c. Item Probl. 26, 27, &c. ad 32 incluſive, ſpectant omnia ad Regulam illam Problemati 26to præmiſſam, viz. *Area cujuſvis Parallelogrammi Rectanguli*, &c.

Cum in Quæſtionibus præmiſſis, itemque in Libris Mathematicis & Philoſophicis, nonnunquam occurrat mentio Ponderum & Menſurarum aliquot in Notis ad Cap. III. omiſſarum, viſum eſt heic loci adjungere Tabulas ſequentes.

Tab. I.

Exhibens Partes *Libræ* vulgo dictæ a Pound Averdupois.

Scrup.	Drachm.	Unc.	Lib.	Cent.	
3					
24	8				
384	128	16			
43008	14336	1792	112		
860160	286720	35840	2240	20	Tonna

Tab.

Tab. II.

Nempe *Ponderum*, quibus usi sunt *Pharmacopolæ*, & quæ conveniunt partim Ponderibus vulgo dictis Averdupois, partim illis aliis vulgo nuncupatis Troy weights.

Gran. min.				
20	Scrup.			
60	3	Drachm.		
480	24	8	Unc.	
5760	288	96	12	Lib.

Tab. III.

Exhibens Mensuras *Anglicanas*, quæ dici solent Capacitatis, & quibus mensurantur *Aridæ*.

Pinta			
8	Congius *		
16	2	Satum †	
64	8	4	Modius

* Angl. a Gallon, † Angl. a Peck.

NB. Congii Capacitas debet esse dig. cub. $272\frac{1}{4}$, & continere Aquæ puræ Libras 9, Uncias 13, Drachmas $12\frac{1}{2}$, Averdupois.

Tab. IV.

Exhibens Mensuras Capacitatis *Anglicanas*, quibus mensurari solent *Liquida*.

Pinta			
8	Congius		
252	$31\frac{1}{2}$	Cadus *	
504	63	2	Dolium †

* Angl. a Barrel, † Angl. a Hogshead.

NB. Ca-

NB. Cadus Vini continet tantum 31½ Congios, ut in Tab. præced. sed Cadus Cervisiæ non lupulatæ continet 32 Congios; lupulatæ, 36.

Porro Capacitas Congii Vini debet esse dig. cub. 231, & continere Aquæ puræ sive Pluviæ Libras 8, Unc. 1, Drachmas 11, Oberdupois; vel Libras 9, Uncias 10, Grana majora 1¼, Troy. Capacitas autem Congii, quo mensuratur utraque Cervisia, debet esse dig. cub. 282, & continere Aquæ puræ sive Pluviæ Libras 10, Uncias 3,426, Oberdupois. Denique Ped. Cub. = Dig. Cub. 1728 qui conficiunt 6,128 Congios: & in Dolio numerantur rotunde 10 Pedes Cubici, vel accuratius 10,287 ped. cub.

Tab. V. VI. & VII.

Conducunt ad expediendam Superficierum Mensurationem, exhibendo Reductionem Mensurarum minorum in majores æquivalentes. Prima reducit *Perticas breves*, secunda reducit *Pedes quadratos*, in Jugera & Perticas longas; tertia reducit *Digitos quadratos* in Pedes quadratos & Partes quartas Pedis quadrati.

	M.			C.			X.	
	Jug.	P.long.	Pert.br	jug.	Pert.l.	P.brev	P.long.	Pert.br.
1	6	1	0	0	2	20	0	10
2	12	2	0	1	1	0	0	20
3	18	3	0	1	3	20	0	30
4	25	0	0	2	2	0	1	0
5	31	1	0	3	0	20	1	10
6	37	2	0	3	3	0	1	20
7	43	3	0	4	1	20	1	30
8	50	0	0	5	0	0	2	0
9	56	1	0	5	2	20	2	10

	CM.				XM.				M.		C.	
	Jug.	P.l.	P.br.	Ped	Jug.	P.l.	P.br.	Ped	P.br.	Ped	P.br.	Ped
1	2	1	7	86	0	0	36	189	3	183	0	100
2	4	2	14	171	0	1	33	126	7	94	0	200
3	6	3	21	257	0	2	30	63	11	05	1	28
4	9	0	29	70	0	3	26	252	14	189	1	128
5	11	1	36	156	0	0	23	179	18	99	1	228
6	13	3	3	240	0	1	20	100	22	11	2	56
7	16	0	11	54	1	2	17	33	25	194	2	156
8	18	1	18	140	1	3	13	232	29	106	2	256
9	20	2	25	225	2	0	10	159	33	17	3	84

Ped;

	M.			C.			X.	
	Ped.	Qu.	Dig.	Ped	Qu.	Dig.	Qu.	Dig
1	6	3	28	0	2	28		10
2	12	3	20	1	1	20		20
3	20	3	12	2	0	12		30
4	27	3	04	2	3	04	1	4
5	34	2	32	3	1	32	1	14
6	41	2	24	4	0	24	1	24
7	48	2	16	4	3	16	1	34
8	55	2	08	5	2	08	2	8
9	62	2	00	6	1	00	2	18

Exempl. ad *Tab. V.* Eſt Ager Perticarum brev. qu. 7854; Quot Jugera idcirco continet? Reſp. Jugera 49, & 14 Pert. brev. quadr. Nempe

	Jug.	P. long.	Pert. br.
7000 —	43	3	10
800 —	5	0	0
50 —	0	1	10
4 —	0	0	4
	49	0	14.

Exempl. ad *Tab. VI.* Eſt Hortus Pedum quadr. 97642. Quot igitur Jugera &c. continet? Reſp. Jugera 2, Pert. br. 38, Ped. qu. 179. Nempe

Ped.		Jug.	P. long.	Pert. br.	Ped.
90000	=	2	0	10	159
7000	=	0	0	25	194
600	=	0	0	02	56
42	=	0	0	00	42
97642	=	2	0	38	179.

Exempl. ad *Tab. VII.* Digiti quadrati 9842 quot Pedes quadratos adæquant? Reſp. Ped. quadr. $68\frac{1}{4}$ + Dig. qu. 14. Nempe

	Ped.	Quadr.	Dig.
9000	62	2	0
800	5	2	8
40		1	4
2			2
	68	1	14.

Tab. VIII.

Conducit ad Mensurationem Solidorum, exhibendo Reductionem *Digitorum Cubicorum* in Pedes Cubicos & partes quartas Pedis Cubici.

	X M.			M.			C.	
	Ped.	Qu.	Dig.	Ped.	Qu.	Dig.	Qu.	Dig.
1	5	3	064	0	2	136	0	100
2	11	2	128	1	0	272	0	200
3	17	1	192	1	2	408	0	300
4	23	0	256	2	1	112	0	400
5	28	3	320	2	3	248	1	068
6	34	2	384	3	1	384	1	168
7	40	3	76	4	0	88	1	268
8	46	1	80	4	2	224	1	368
9	52	0	144	5	0	360	2	036

Exempl. ad *Tab. VIII.* Digiti Cubici 11572 quot Pedibus Cubicis æquantur? Resp. Ped. cub. $6\frac{1}{2}$ + Dig. cub. 340. Nempe

	Ped.	Qu.	Dig.
10000 =	5	3	064
1000 =	0	2	136
500 =	0	1	068
$7\frac{1}{2}$ =	0	0	072
11572	6	2	340

Tab. IX.

Exhibet Gravitatem (uti dici solet) Specificam Metallorum, Lapidum, &c. Ubi Series *A* ostendit, quot *Unciarum* (Troy) sit (in Aere) Digitus Cubicus cujusvis Metalli, &c. Contra Series *B* ostendit, quot *Digitorum Cubicorum* sit Uncia cujusvis Metalli, &c. Denique Series *C* docet, quot Unciarum Troy sit in Aqua Digitus Cubicus cujusvis Metalli, &c.

	A. Unc.	B. Dig.	C.
Aurum	9.91735	0.10083	9.33962
Argentum vivum	7.93388	0.12604	7.38645
Plumbum	6.16198	0.16229	5.58225
Argentum	5.50083	0.18179	4.92310
Cuprum	4.81342	0.26276	4.23569
Ferrum malleatum	4.27715	0.23360	3.69942
Ferrum fusum	3.96821	0.25253	3.09048
Stannum	3.96694	0.25208	3.38921
Marmor	1.59631	0.62644	1.01858
Lapis communis	1.09835	0.91045	0.50062
Mel	0.79339	1.26042	0.21566
Aqua salsa	0.57773	1.79490	0.00000
Aqua non salsa, & Vinum	0.52773	1.77490	
Oleum	0.47603	2.10069	
Triticum	0.37628	2.65757	
Lignum Quernum aridum	0.40745	2.45609	

Ad *Probl.* 94, 95 & 96. Hæc ita se habent (uti monet Cl. *Newtonus*) ex hypothesi, quod partes Aquæ recta ascendunt, vel recta descendunt, sed ascensus & descensus ille verius fit per Circulum, ideoque Tempus hoc propositum nonnisi quamproxime definitum esse affirmo.

Ad *Probl.* 105 & 106. Ex Solutione horum Problematum deduci possunt duo Theoremata ad Solutionem Problematum omnium consimilium: Nempe ut Summa vel Differentia duorum Temporum datorum est ad Tempus alterutrum datum, ita Tempus alterum datum ad Tempus quæsitum. Hoc est, $b+c:b::c:\frac{bc}{b+c}$. Item $c-b:b::c:\frac{bc}{c-b}$. Idem de Problematibus cæteris intelligi potest, mutatis mutandis.

ADDENDA

Ad Cap. IX. §. IV. vel, ad pag. 100. §. *V.* 4.

Methodum inveniendi Uncias, seu Numeros præfigendos Membris alicujus Potestatis à Radice Binomia procreatæ, quam frustra quæsiverant egregii Mathematici non pauci, invenit tandem sagacissima ingenii *Newtoniani* vis. Nempe, si Potestatis cujusvis propositæ Exponens vocetur *m*, Unciæ orientur ex hujusmodi continua Multiplicatione, viz. $1 \times \frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5} \times$ &c. Exempli gratia: Postulentur Unciæ Bicubi seu Potestatis Sextæ, cujus idcirco Exponens est 6. Erunt $1 \times \frac{6-0}{1} (=6) \times \frac{6-1}{2} (=15) \times \frac{6-2}{3} (=20) \times \frac{6-3}{4} (=15) \times \frac{6-4}{5} (=6) \times \frac{6-5}{6} = 1$. Hoc est, 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1, sunt Unciæ Bicubi, uti patebit ex inspecta Tabula Posteriori. Ubi notandum, quod soleant duæ Unciæ extremæ Potestatis cujuscunque semper intelligi, cùm utraque semper sit Unitas.

FINIS.